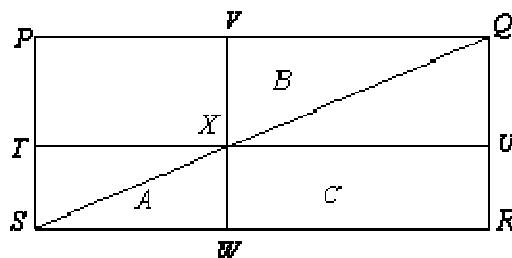


مقاله را با طرح مساله ي زير آغاز مي كنيم:

مساله: مستطيل PQRS با طول و عرض به ترتيب ۱۵ و ۶ سانتي متر را در نظر بگيريد. مساحت مثلث A برابر ۴ سانتي متر مربع و مساحت مثلث B برابر ۱۶ سانتي متر مربع مي باشند. مساحت مستطيل C چقدر است؟



شکل ۱

راه حل اول: مساحت مثلث SQR برابر است با: $(15 \times 6) / 2 = 45$. بنابراین مساحت مستطيل C چنين محاسبه خواهد شد: $45 - 4 = 41$.

راه حل دوم: با استفاده از قضيه ي تالس و با توجه به اين كه نسبت مساحت هاي دو مثلث B به A برابر ۴ است پس: $VQ/WS = VX/WX = QX/SX = 2$ و لذا مساحت C برابر ۲۰ سانتي متر مربع است.

در اين جا مي بينيد كه حل اين مساله به دو جواب مختلف منجر مي شود. اما مشكل كجاست؟

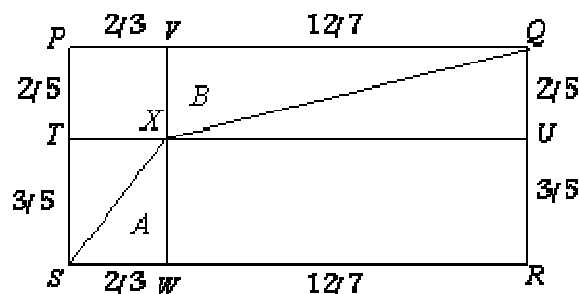
در حقيقت بايد گفت كه با فرض هاي مساله، X نمي تواند بر پاره خط SQ واقع شود.

اگر $PT = a$ و $VQ = b$ قرار دهيم آن گاه $(ab)/2 = 16$ و $(9-a)(15-b)/2 = 4$ و لذا خواهيم داشت: $15a^2 - 114a + 192 = 0$. از اين جا دو سري جواب به صورت زير به دست مي آوريم:

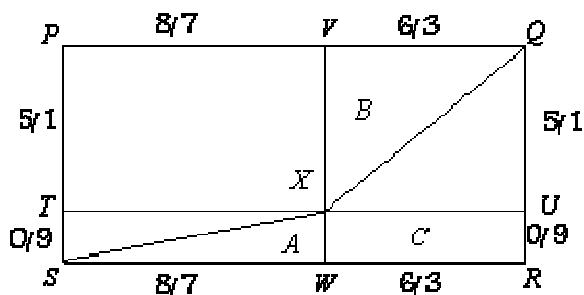
$$a = (19 - \sqrt{41}) / 5 \approx 2/5, \quad b = (19 + \sqrt{41}) / 2 \approx 12/7$$

$$a = (19 + \sqrt{41}) / 5 \approx 5/1, \quad b = (19 - \sqrt{41}) / 2 \approx 6/2$$

پس شكل مساله با توجه به مفروضات آن به يكي از دو صورت زير رسم مي شود:

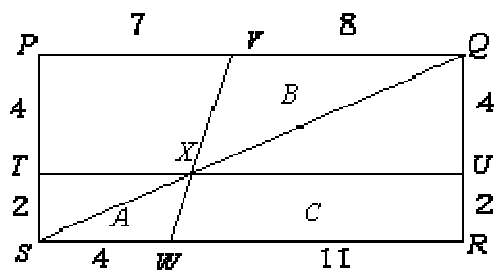


شکل ۲



شکل ۳

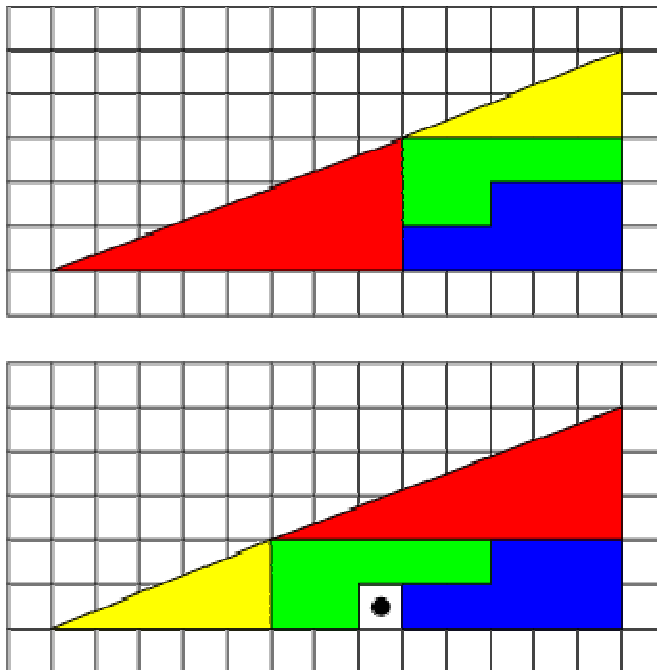
مساحت C در شکل ۲ برابر $b(p-a) \approx 44/4$ و در شکل ۳ برابر $b(p-a) \approx 5.6$ است .
 حالت دیگری که می توان در نظر گرفت از این قرار است: (در این حالت C دیگر مستطیل نیست).



شکل ۴

پارادوکس کیوری (Curry):

طرح مساله ی قبل ما را به سمت پارادوکس مشهوری به نام پارادوکس کیوری سوق می دهد. در شکل زیر در هر دو بخش چنین به نظر می رسد که یک مثلث قائم الزاویه به دو مثلث قائم الزاویه ی کوچکتر و یک مستطیل تقسیم شده است جز این که دومی یک واحد مربع کم تر دارد. در اولی مستطیل گوشه ی سمت راست پایین یک مستطیل 3×5 و در دومی یک مستطیل 2×8 می باشد.

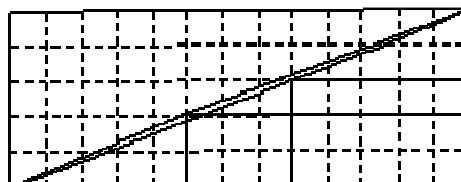


شکل ۵

با مقایسه‌ی شیب وترهای سه مثلث قائم الزاویه در شکل ۵ می‌بینیم که:

$$\frac{2}{5} > \frac{5}{13} > \frac{2}{8}$$

توضیحی که در مورد این پارادوکس مطرح می‌شود این است که مثلث بزرگ در واقع يك مثلث نمی‌باشد! وتر مثلث بزرگ شکستگی دارد که در قسمت بالایی، اندکی متمایل به داخل است در حالی که در قسمت پایینی، اندکی متمایل به خارج است.



شکل ۶

مساحت بین دو قطعه‌ی شکسته، برابر ۱ واحد مربع است.

طول اضلاع مجاور به زاویه‌ی قائمه به طور تصادفی انتخاب نشده‌اند. طول این اضلاع در سه مثلث عبارت هستند از: (۲، ۵)، (۳، ۸) و (۵، ۱۳) که اعداد فیبوناتچی می‌باشند.

حالت کلی پارادوکس:

اعداد فیبوناتچی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_1 - F_1 - 1 \quad \text{و} \quad F_n - F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

اکنون در شکلي مانند شکل ۵، اضلاع مجاور به زاویه ي قائمه ي مثلث ها را به صورت:

$$(F_{n+r}, F_{n+r}), (F_{n+r}, F_{n+1}), (F_{n+r}, F_n)$$

در نظر مي گيريم.

در اين لحظه، توجه شما را به اتحاد کاتالان جلب مي کنيم:

$$F_n^r - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{(n-r)} F_r^r$$

در اين رابطه، r و n اعداد طبيعي بوده و $r < n$ است. (براي ديدن اثباتي از اين اتحاد به: www.planetmath.org مراجعه نماييد.)
با قرار دادن $n+2$ به جاي n و $r=2$ در اتحاد کاتالان داريم:

$$F_{n+2}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n F_2^2 = (-1)^n \quad (*)$$

از طرفي:

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_{n+1} - F_{n+2}F_{n+2} &= (F_{n+2} + F_{n+1})F_{n+1} - F_{n+2}F_{n+2} \\ &= F_{n+2}F_{n+1} + F_{n+1}F_{n+1} - F_{n+2}F_{n+2} \\ &= F_{n+2}F_{n+1} + F_{n+1}(F_{n+1} - F_{n+2}) = F_{n+1}F_{n+1} - F_{n+2}^2 = (-1)^n \quad (**)$$

$$\frac{F_n}{F_{n+2}} < \frac{F_{n+2}}{F_{n+2}} < \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

در روابط (*) و (**) براي n زوج، هر دو عبارت مثبت خواهند بود و لذا خواهيم داشت:

$$\frac{F_n}{F_{n+2}} > \frac{F_{n+2}}{F_{n+2}} > \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

و همچنين براي n فرد، نتیجه مي شود که:

اين کسرها در حقيقت، شيب سه وتر مثلث هاي قائم الزاويه هستند و همان توضيحي که در حالت خاص آمد را براي حالت کلي پارادوکس، خواهيم داشت.

توضيح ديگري که در مورد اين پارادوکس مي توان ارائه کرد بر اساس مقايسه ي مساحت ها است. در قسمت بالايي شکل ۵ داريم: $32/5 = (13 \times 5)/2 =$ مساحت که برابر است با:

$$32 = 10 + 12 + 5 = \text{مساحت مثلث زرد} + \text{مساحت مثلث قرمز} + \text{مساحت مستطيل}$$

و اين تناقض است.

در قسمت پاييني شکل ۵ نیز با يك روش، مساحت ۳۲ واحد مربع و با روشي ديگر $31/5$ واحد مربع مي شود که تناقض است.

$$\text{پارادوکس } 65 = 64 :$$

اکنون بايد قادر باشيد که مطلب زير را توجيه نماييد:

FunPile.com

$$64 = 65 ?$$

منبع:

www.math.nus.edu.sg