در این مقاله هدف ما،بررسی ساده ترین مدل جمعیت است.یعنی مدل جمعیت یک بعدی تعینی.(یعنی فرض می کنیم فقط یک نوع جمعیت باشد و در آن عوامل تصادفي موثر نیستند.)

ما قبل از بیان فرمول مدل جمعیت، مثال زیر را مطرح می کنیم:

مثال:متخصصان بر این باورند که زمین های قابل کشت وزرع، حداکثر می تواند غذای ۴۰ میلیارد انسان را تامین کند،در آغاز سال ۱۹۹۰میلادی جمعیت جهان۵/۲میلیارد نفر تخمین زده شد . اگر جمعیت با میزان رشد ثابت ۲% در سال افزایش یابد،در چه زمانی جمعیت به حداکثر میزان ذکر شده خواهد رسید؟

حل:

$P_0 =$ جمعیت اولیه به میلیارد = ۵/۲

r = نرخ رشد = ۰/۰۲

جمعیت در سال $۱۹۹۱ = (۵/۲)(۱/۰۲)$ میلیارد

جمعیت در سال $۱۹۹۲ = (۵/۲)(۱/۰۲)^{۲}$ میلیارد

جمعیت بعد از n سال $= (۵/۲)(۱/۰۲)^{n}$ میلیارد

حال قرار می دهیم: $۴۰ = (۵/۲)(۱/۰۲)^{n}$ و n را با لگاریتم گرفتن از طرفین به دست می آوریم :

$$n \log(۱/۰۲) = \log \frac{۴۰}{۵/۲}$$

در نتیجه :

$$n = \frac{\log \frac{۴۰}{۵/۲}}{\log(۱/۰۲)} = ۱۰۳/۰۲$$

یعنی در سال ۲۰۹۳=۱۰۳+۱۹۹۰ جمعیت به ٤۰ میلیارد نفر می رسد.ما در این مثال، نرخ رشد جمعیت را سال به سال محاسبه کردیم.حال رشد جمعیت را در پایان هر ماه حساب مي كنيم،در مثال بالا نرخ رشد در ماه برابر با :

$$۰/۰۲ \div ۱۲ = \frac{۲}{۱۲۰۰} = \frac{۱}{۶۰۰}$$ می شود.

جمعیت بعد از یک ماه $=(۵/۲)\left(۱+\frac{۱}{۶۰۰}\right)$ میلیارد

جمعیت بعد از دو ماه $=(۵/۳)\left(۱+\frac{۱}{۶۰۰}\right)^{۲}$ میلیارد

جمعیت در سال ۱۹۹۱= $(۵/۲)\left(۱+\frac{۱}{۶۰۰}\right)^{۱۲}$ میلیارد

جمعیت بعد از n سال = $(۵/۲)\left(۱+\frac{۱}{۶۰۰}\right)^{۱۲n}$ میلیارد

جمعیت در سال $۲۰۶۳=(۵/۲)\left(۱+\frac{۱}{۶۰۰}\right)^{۱۲\times ۱۰۳}$ میلیارد

$$\Rightarrow \quad (۱/۰۰۱۶۶۷)^{۱۲۳۶}(۵/۲) = ۴۰/۷۳۰۸۱۸$$

حال اگر جمعیت را روز به روز محاسبه کنیم،نرخ رشد دریک روز برابر با:

$$\frac{۱}{۶۰۰} \div ۳۰ = \frac{۱}{۱۸۰۰۰}$$ می شود.

جمعیت بعد از یک سال $= (۵/۲) \left(۱+\frac{۱}{۱۸۰۰۰}\right)^{۱×۴}$ میلیارد

جمعیت بعد از n سال$= (۵/۲) \left(۱+\frac{۱}{۱۸۰۰۰}\right)^{۳۶ n}$ میلیارد

جمعیت در سال ۲۰۹۳ برابر با :

$$\left(۱+\frac{۱}{۱۸۰۰۰}\right)^{۳۶×۱ ۳}(۵/۲)=\left(۱+\frac{۱}{۱۸۰۰۰}\right)^{۳۷ ۸}(۵/۲)=۴۰/۷۹۶۷۷۶$$

میلیارد می شود.

حال اگر جمعیت را در هر ساعت محاسبه کنیم،نرخ رشد جمعیت در یک ساعت برابراست با: $\frac{۱}{۱۸۰۰۰} \div ۲۴ = \frac{۱}{۴۳۲۰۰۰}$.

جمعیت در سال ۲۰۹۳ برابر است با:

$$\left(۱+\frac{۱}{۴۳۲۰۰۰}\right)^{۳۷ ۸×۲۴}(۵/۲)=(۱/۰۰۰۰۰۲۳)^{۸۸۹۹۲}(۵/۲)=۴۰/۷۹۸۴۰۸$$

اگر جمعیت را در هر ثانیه حساب کنیم،جمعیت در سال ۲۰۹۳ بیش تر می شود و به ۴۰/۷۹۹میلیارد نفر نزدیک می شود.
برای دیدن علت این امر بهتر است به مطلب زیر توجه کنیم:

دنباله ی $a_n=\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$ را در نظرمی گیریم.این دنباله را برای مقدار های مختلف n محاسبه می کنیم:

n	a_n
۱	۲
۱۰	۲/۵۹۳۷۴
۱۰۰	۲/۷۰۴۸۱
۱۰۰۰	۲/۷۱۶۹۲
۱۰۰۰۰	۲/۷۱۸۱۴
۱۰۰۰۰۰	۲/۷۱۸۲۶

قضیه: $\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$ موجود است و آن را عدد e مي ناميم .

e=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲... حال فرض می کنیم نرخ رشد جمعیتr باشدو جمعیت اولیه را با P و جمعیت بعد از t سال را با $P(t)$ نشان مي دهيم.اگر جمعیت را سال به سال محاسبه کنیم:

$$P(۱)=(۱+r)P \quad و \quad P(۲)=(۱+r)^۲P \quad . \quad . \quad ..P(t)=(۱+r)^tP$$

و اگر جمعیت را در $\frac{۱}{n}$ سال محاسبه کنیم:

$$P(۱)=\left(۱+\frac{r}{n}\right)^nP \quad ,P(۲)=\left(۱+\frac{r}{n}\right)^{۲n}P. \quad . \quad ..,P(t)=\left(۱+\frac{r}{n}\right)^{nt}P$$

یعنی بعد از t سال درصورتی که در هر $\frac{۱}{n}$ سال، جمعیت را محاسبه کنیم،جمعیت به دو متغیر t (زمان) و n (تعداد تقسیمات زمان)بستگی دارد.بنابر این با $P_n(t)$ نشان می دهیم:

$$P_n(t)=\left(۱+\frac{r}{n}\right)^{nt}P$$

حال اگر n را بزرگ و بزرگ تر کنیم،یعنی محاسبه ی جمعیت را در مدت زمان های کوتاه تری انجام دهیم ،مدل ما به مدل واقعی جمعیت نزدیک و نزدیک تر می شود.یعنی اگر n را به سمت بی نهایت میل دهیم ،جمعیت در هر لحظه محاسبه می شود.این مدل را مدل پیوسته می نامیم و آن را با $P(t)$ نشان می دهیم.یعنی:

$$P(t)=\lim_{n\to\infty} P_n(t)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{r}{n}\right)^{nt}P$$

با فرض $x=\frac{n}{r}$ ،اگر $n\to\infty$ آن گاه $x\to\infty$.بنابراین

$$P(t)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{xrt}P_{\circ}$$
.

اما :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{xrt}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{rt}$$
.

و می توان نشان داد که (توجه : x لزوما" طبيعي نيست) :

$$\lim_{x\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^x=e$$

بنابراین
$$P(t)=\left[\lim_{x\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x}\right]^{rt}P=Pe^{rt}$$

یعنی مدل جمعیت پیوسته به صورت زیر است:

$$P(t)=Pe^{rt}$$

در این جا r می تواند منفی نیز باشد.یعنی جمعیت یک کشور،سرمایه و... می تواند نزول کند.زمانی که r مثبت باشد، مدل را مدل رشد و زمانی که r منفی باشد ، مدل زوال گوییم.

مجددا" به محاسبه ي جمعیت در مثال ذکر شده در سال ۲۰۹۳ می پردازیم:

$$r=۰/۰۲$$
$$t=۲۰۹۳-۱۹۹۰=۱۰۳$$

$$P=۵/۲$$ میلیارد نفر

بنابراین :

$$P(t)=P(۱۰۳)=(۵/۲)e^{(۰/۰۲)(۱۰۳)}=(۵/۲)e^{۲/۰۶}=۴۰/۷۹۹۴۳$$ میلیارد نفر

بنابراین اولین محاسبه که سال ۲۰۹۳ به عنوان سالی است که کره ی زمین جایی برای زیستن ندارد، صحیح نیست. این سال را می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$۴۰=P(t)=(۵/۲)e^{۰/۰۲t}$$ میلیارد نفر

$$\Longrightarrow\quad e^{۰/۰۲t}=\frac{۴۰}{۵/۲}$$

$$\Longrightarrow\quad ۰/۰۲t=\ln\frac{۴۰}{۵/۲}$$

و از آن جا :
$$t=۵۰\ln\frac{۴۰}{۵/۲}=۱۰۲/۰۱۱۰۴$$

یعنی سال موعود با توجه به رابطه ي : ۲۰۹۲=۱۰۲+۱۹۹۰، سال ۲۰۹۲است.

منبع:مجله ي گنجینه شماره ي ۳۳