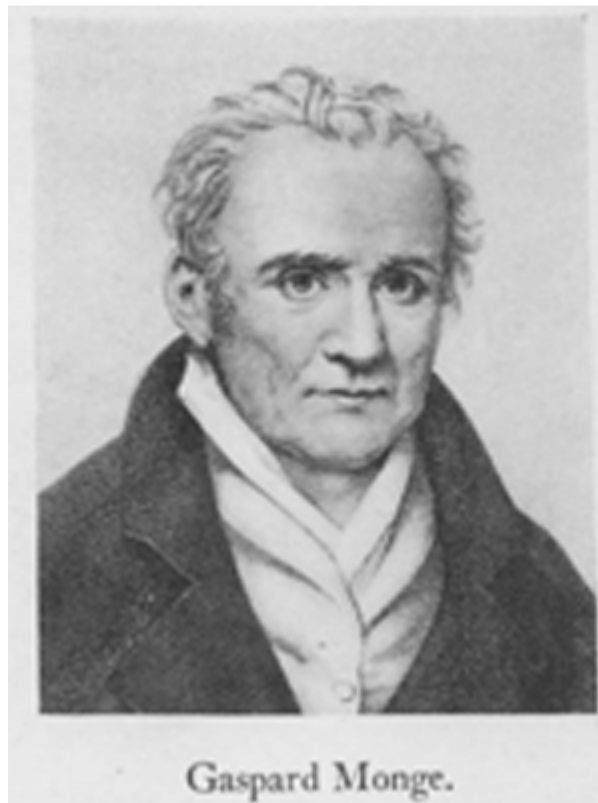
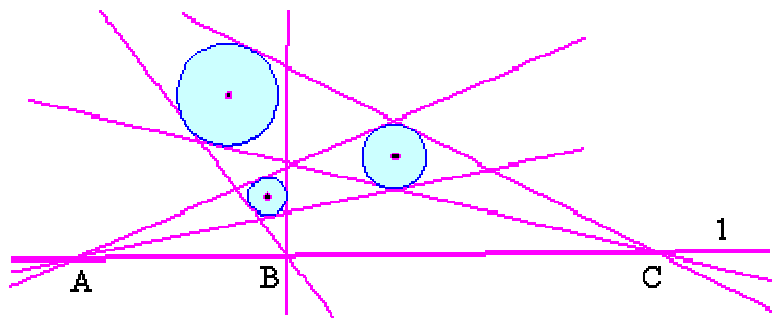


در این مقاله یکی از قضایای جالب هندسه ی مسطحه را روشی کاملاً "نامتعارف" اثبات می کنیم و آن عبارت است از : قضیه ی دایره ی مونژ .



قضیه ی دایره ی مونژ : سه دایره ی دو به دو متخارج با شعاع های مختلف در نظر بگیرید . سپس مماس های مشترک خارجی هر جفت از این دایره ها را رسم کنید . ثابت کنید که محل تلاقی این مماس ها ، بر یک امتدادند .



پیش از اثبات ، نیاز به معرفتی چند مفهومی فیزیکی داریم !!!

الف) مرکز جرم : تاکنون در بررسی حرکت اجسام ، آن ها را به صورت ذرات جرم دار بدون بعد در نظر گرفته ایم . اما آیا توجیهی برای این کار داریم؟ با معرفی مفهوم " مرکز جرم " این امر توجیه می شود . برای جسم ، نقطه ای به نام مرکز جرم وجود دارد که حرکت آن مانند حرکت ذره ای است که تحت تاثیر همان نیروهای خارجی قرار دارد .

نکته ۱ : مرکز جرم یک دیسک در صفحه با توزیع یکنواخت جرم ، عبارت است از مرکز دیسک . در ادامه ی این مقاله دیسک ها با توزیع یکنواخت جرم فرض می شوند.

نکته ۲: برای سیستمی متشکل از دو دیسک به جرم های m_1, m_2 با مرکز هائی به مختصات $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ مرکز جرم را با $\begin{pmatrix} X_{cm} \\ Y_{cm} \end{pmatrix}$ تعریف می کنیم که در آن:

$$Y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \quad \text{و} \quad X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

این تعریف نشان می دهد که مرکز جرم این سیستم بر خط واصل مرکزهای دو دیسک واقع است.

نکته ۳: اگر سیستم S_1 متشکل از ۲ دیسک و سیستم S_2 متشکل از ۲ دیسک به ترتیب دارای جرم کل M_1, M_2 باشند، آن گاه مرکز جرم سیستم S که

از دو سیستم S_1 و S_2 تشکیل می شود را با $\begin{pmatrix} X_s \\ Y_s \end{pmatrix}$ تعریف می کنیم که در آن:

مرکز جرم های S_1 و S_2 هستند. این تعریف نشان می دهد که مرکز جرم S بر خط واصل مرکز جرم های S_1 و S_2 واقع است.

(ب) جرم منفی: وقتی به جسمی نیرو وارد می کنیم، طبق رابطه ی برداری:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

انتظار این است که جسم در صورت حرکت، در جهت نیروی وارده حرکت کند. علت این انتظار، مثبت بودن کمیت جرم در رابطه ی فوق است. در این جا می خواهیم شما را با مفهوم جرم منفی آشنا کنیم که در فیزیک نوین کاربردهائی دارد. گوئیم جسمی دارای جرم منفی است هرگاه با اعمال نیرو بر جسم، در صورت حرکت، جسم در خلاف جهت نیروی وارده حرکت کند، یعنی مثلاً "ما جسم را هل می دهیم و جسم به طرف ما شتاب می گیرد. !!! جرم منفی را با نماد $-m$ نشان می دهیم.

اکنون به اثبات قضیه می پردازیم:

دایره ها را با c, b, a نام گذاری کرده و محل تلاقی مماس های خارجی b, a را با C و c, a را با B و c, b را با A نشان می دهیم. هریک از دایره های c, b, a را به عنوان یک دیسک به ترتیب با جرم های $\pm m_1, \pm m_2, \pm m_3$ که قدر مطلق این جرم ها با شعاع دیسک ها نسبت عکس دارند، در نظر می گیریم. حال توجه شما را به لم زیر جلب می کنیم:

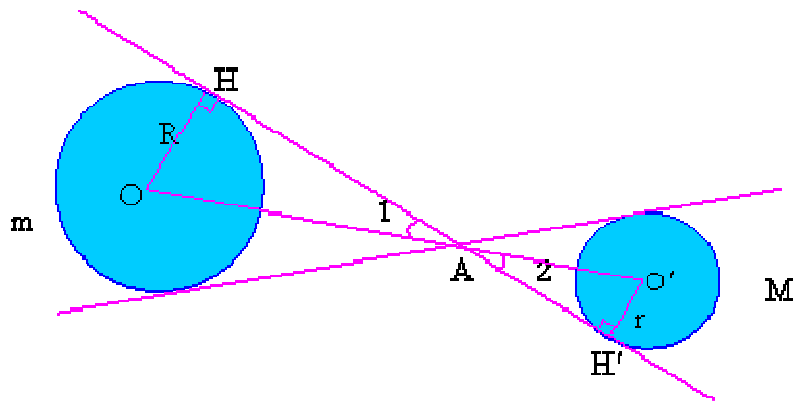
لم: دو دیسک در صفحه به شعاع های r, R با $R > r$ در نظر بگیرد.

(۱) اگر دو دیسک دارای جرم مثبت باشند که جرم ها با شعاع ها نسبت عکس دارند، آن گاه مرکز جرم سیستم متشکل از آن ها بر محل تقاطع مماس های مشترک داخلی آن ها واقع است.

(۲) اگر دیسک به شعاع r دارای جرم منفی و دیسک به شعاع R دارای جرم مثبت باشند به طوری که قدر مطلق جرم ها با شعاع ها نسبت عکس دارند، آن گاه مرکز جرم سیستم متشکل از آن ها بر محل تقاطع مماس های مشترک خارجی آن ها واقع است.

اثبات لم : مبدا محور مختصات را بر O و محور X ها را بر OO' در نظر می گیریم .

(1)



$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A_2 \\ \angle H = \angle H' = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta OAH \sim \Delta O'A H' \Rightarrow \frac{OH}{O'H'} = \frac{OA}{O'A}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{OA}{O'A} \Rightarrow \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{M}} = \frac{OA}{O'A} \Rightarrow M \cdot O'A = m \cdot OA \quad (*)$$

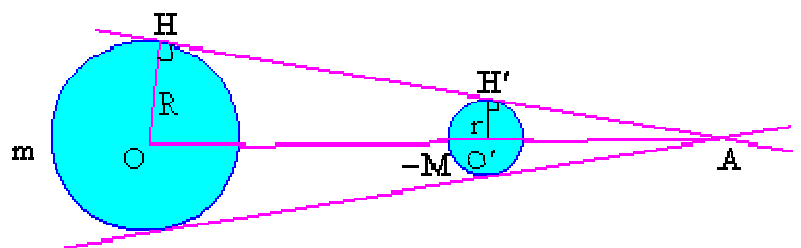
اگر مرکز جرم S (سیستم متشکل از دو دیسک) باشد آن گاه با استفاده از (*) خواهیم داشت :

$$X = \frac{mx_o + Mx_o'}{m + M} = \frac{M(OA + O'A)}{m + M} = \frac{M \cdot OA + M \cdot O'A}{m + M}$$

$$= \frac{M \cdot OA + m \cdot OA}{m + M} = OA = X_A$$

$$Y = \frac{my_o + My_o'}{m + M} = \dots = Y_A$$

(2) اگر مرکز جرم S (سیستم متشکل از دو دیسک) باشد آن گاه با استفاده از (*) خواهیم داشت (در این حالت نیز برقرار است) :



$$X = \frac{mx_o - Mx_o'}{m - M} = \frac{-M(OA - O'A)}{m - M} = \frac{-M \cdot OA + M \cdot O'A}{m - M}$$

$$= \frac{-M \cdot OA + m \cdot OA}{m - M} = OA = X_A$$

$$Y = \frac{my_o - My_o'}{m - M} = 0 = Y_A$$

اکنون ۳ سیستم به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$S_1 = (m_a, -m_c) \quad S_2 = (m_b, -m_c) \quad S_3 = (m_a, -m_b)$$

اگر با استفاده از دو سیستم S_1 و S_2 سیستمی تشکیل دهیم که جرم‌های :

$m_b, -m_b$ بر یکدیگر واقع شوند ، آن‌گاه سیستم حاصل عبارت است از : S_1 . پس طبق نکته ۳ و قسمت ۲) لم فوق ، مرکز جرم سیستم S_1 که همانا

نقطه ی B می‌باشد با مرکز جرم‌های S_1 و S_2 که همانا A,C هستند ، بر یک امتداد واقع می‌شوند . و به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می‌رسد .

منابع :

<http://cut-the-knot.org>

<http://wikipedia.org>

کتاب درسی فیزیک هالیدی و رزنیک