

روزي روزگاري، در گذشته‌هاي نه چندان دور، در شهري دو رفتگر زندگي مي‌کردند که هر روز صبح براي رفتن به محل کارشان از چهار چرخه‌هاي قديمي همانند هم که روي دو ريل حرکت مي‌کرد، استفاده مي‌کردند. روزي برف شديدي شروع به باریدن کرد و طبق معمول دو رفتگر سوار بر چهار چرخه‌هايشان شدند تا به محل کارشان بروند. يکي از آن‌ها که فعال و پرکار بود، برف‌هايي که روي چهار چرخه‌اش مي‌نشست را بلافاصله در جهت عمود بر امتداد حرکتش پارو مي‌کرد. ولي رفتگر دوم که تنبل و خواب‌آلود بود، به محض سوار شدن بر چهار چرخه به خواب رفت. حال فکر کنيد با فرض اين که سرعت اوليه

ي هر دو سيستم (چهار چرخه + رفتگر و وسايلش) V_0 باشد، کدام يك از آن‌ها در محدوده‌ي زماني مشخص، مسافت بيشتري را طي مي‌کند؟ (دو رفتگر هم وزن بوده و وسايل شان كاملاً يکسانند.)

قبل از هر چيز اجازه دهيد يك سري پيش‌فرض‌ها را در نظر بگيريم. اولاً: چهار چرخه‌ها حرکتی مستقيم الخط دارند، ثانياً: از اصطکاک صرف نظر مي‌شود و ثالثاً: برف به ميزان ثابت μ کيلوگرم در ثانيه، بر هر کدام از چهار چرخه‌ها مي‌بارد.

شايد در نظر اول اين طور تصور شود که در محدوده‌ي زماني مشخص، رفتگر پرکار مسافت بيشتري را طي خواهد کرد، ولي در کمال تعجب خواهيم ديد که رفتگر تنبل مسافت بيشتري را طي مي‌کند، ولي چرا؟ ابتدا وضعيت رفتگر تنبل را در نظر مي‌گيريم. در اين حالت، جرم برف به جرم سيستم اضافه مي‌شود. از آنجايي که هيچ‌گونه برهم‌کنشي با نيروي خارجي در جهت افقي وجود ندارد، پس اندازه‌ي حرکت (تکانه) سيستم در جهت افقي پايسته مي‌ماند.



اگر m_0 جرم اوليه ي سيستم باشد، آن‌گاه جرم سيستم در زمان t برابر خواهد بود با:

$$m(t) = m_0 + \mu t$$

تکانه‌ي اوليه برابر با $m_0 V_0$ است، به دليل پايستگي تکانه خواهيم داشت:

$$m_0 V_0 = m(t) V(t) = (m_0 + \mu t) V(t)$$

$$V(t) = \frac{V_0}{1 + \frac{\mu t}{m_0}} \quad (**)$$

پس سرعت اين سيستم در هر لحظه با معادله ي زير بيان مي‌شود:

حالا وضعيت رفتگر پرکار را در نظر بگيريد. هنگامي که دانه‌هاي برف روي چهار چرخه‌ي او مي‌نشينند، سرعت چهار چرخه را کسب مي‌کنند و در نتيجه مقداري تکانه به دست مي‌آورند. از آنجا که رفتگر پرکار به محض نشستن برف، آن را از روي چهار چرخه اش در جهت عمود بر امتداد حرکتش به اطراف پارو مي‌کند، پس عملاً در هر لحظه، مقداري از تکانه‌ي اين سيستم از دست مي‌رود و اين يعني:

$$dP = -V \mu dt$$

از آن جا که به برف، امکان جمع شدن بر روي چهار چرخه داده نمي‌شود، جرم

$$\frac{dP}{dt} = m_0 \frac{dV}{dt}$$

سيستم، مقدار ثابتي است و تغيير اندازه‌ي حرکت سيستم، صرفاً به سرعت چهار چرخه بستگي خواهد داشت:

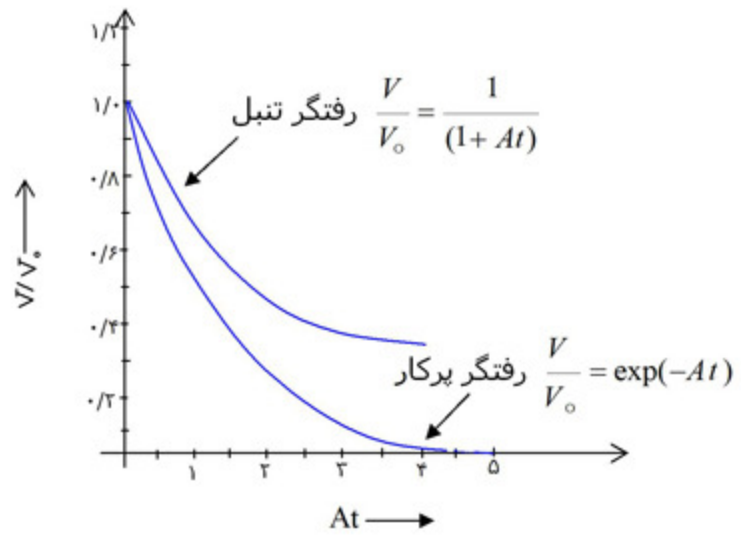
$$\frac{-\left(\frac{\mu}{m_0}\right)t}{-m_0 V_0} \rightarrow V(t) = V_0 e^{-\frac{\mu}{m_0} t} \quad (***)$$

لم: اگر x عدد حقيقي نامنفي دلخواهي باشد آن‌گاه: $e^{-x} \geq 1 - x$

اين لم به کمک قضيه ي مقدار ميانگين اثبات مي‌شود و در کتب استاندارد حساب ديفرانسيل و انتگرال آمده است.

$$\exp(-At) \leq \frac{1}{1 + At} \quad \text{اگر } A = \frac{\mu}{m_0} \quad \text{قرار دهيم، آن‌گاه با توجه به لم فوق خواهيم داشت:}$$

بنابراین با توجه به روابط (*) و (**) و رابطه ی اخیر، در محدوده ی زمانی مشخص، رفتگر تنبل بیش تر از رفتگر پرکار، مسافت طی می کند. (شکل زیر)



منبع: ۱۰۰ مساله و معماي جالب فيزيك و رياضي