آزمون مدارس برتر ایران

به ابتکار دبیرستان انرژی اتمی ایران

پرسش نامه

آزمون شماره ۱
۲۰ آذر ۱۳۹۳

پرســـشنـــامـه

الـمـپـیـاد ریـاضـی

مدت آزمون: ۱۷۵ دقیقه

تذکرات:

سؤالات ۵ گزینه‌ای نمره منفی دارد.

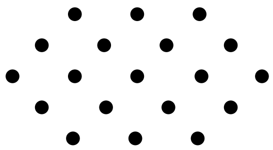
سؤالات پاسخ کوتاه ۴ نمره دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

گروه طراحی و بازنگری: محمدرضا ارمندپور ـ فریبرز صالحی ـ مرتضی اشرفی جو ـ نوید صفایی

سؤالات تستی

۱. در شکل روبه‌رو چند خط وجود دارند که دقیقاً از ۲ نقطه‌ی شبکه‌ی ۶ ضلعی عبور کند؟

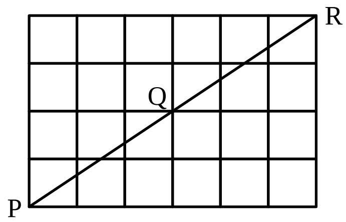


۱) ۱۷۱
۲) ۹۲
۳) ۹۰
۴) ۶۰
۵) ۱۱۶

۲. چند عدد حقیقی مثل (a,b) در تساوی‌های $a+\frac{10b}{a^2+b^2}=5$ و $b+\frac{10a}{a^2+b^2}=4$ صدق می‌کند؟

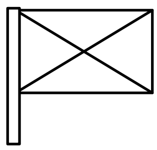
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۴

۳. در شکل روبه‌رو ۲۴ مربع ۱×۱ شبکه‌ای ۶×۴ را شکل می‌دهند. منظور از یک نقطه‌ی مشبکه ـ نقطه‌ای است که از تقاطع خط عمودی و افقی حاصل شود. با رسم قطر PR، تنها نقاط مشبکه‌ی P، Q و R روی قطر قرار می‌گیرند. در یک شبکه‌ی ۴۵×۳۰ چند نقطه‌ی مشبکه روی قطر قرار می‌گیرند؟



۱) ۱۹
۲) ۱۶
۳) ۱۵
۴) ۱۸
۵) ۱۲

۴. مطابق شکل یک پرچم به ۴ بخش تقسیم شده و قرار است هر بخش با یکی از ۵ رنگ قرمز، سفید، آبی، سبز و بنفش رنگ شود به طوری که ۲ مثلث مجاور هم رنگ نباشند، این کار به چند روش ممکن است؟



۱) ۱۸۰
۲) ۲۰۰
۳) ۲۲۰
۴) ۲۴۰
۵) ۲۶۰

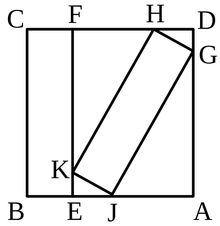
۵. در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و می‌دانیم: $B\hat{A}C=40^\circ$ و $AC=6$ و $AB=10$. نقاط D و E روی AB و AC قرار دارند. حداقل مقدار $BE+DE+CD$ چند است؟

۱) $3+6\sqrt{3}$ ۲) ۱۳/۵ ۳) $8\sqrt{3}$ ۴) ۱۴ ۵) $9+3\sqrt{3}$

۶. چند تابع مثل $f:\{1,\dots,1393\}\to\{1,\dots,1393\}$ داریم که به ازای هر ۲ عدد طبیعی مثل i و j با فرض $1\le i\le j\le 2\le 3$ داشته باشیم:
$f(i)<f(j)+j-i$

۱) $\binom{2784}{1393}$ ۲) 2^{1393} ۳) $\binom{2785}{1393}$ ۴) $\binom{2786}{1393}$ ۵) ۱۳۹۳

۷. در شکل زیر ABCD مربعی به طول واحد است. و مستطیل‌های JKHG و EBCF مشابه هستند. طول BE چند است؟



۱) $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-2)$
۲) $\frac{1}{4}$
۳) $2-\sqrt{3}$
۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
۵) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

۸. محمد ۸ جعبه با نام‌های ۱ و ۲ و ... و ۸ را در اختیار دارد و نیز دارای ۸ توپ با شماره‌های ۱ و ۲و ... و ۸ می‌باشد. به چند روش می‌توان توپ‌ها را در جعبه گذاشت تا در هر جعبه دقیقاً یک توپ باشد و توپ ۱ در جعبه‌ی ۱ نباشد. توپ ۲ نیز در جعبه‌ی ۲ و توپ ۳ در جعبه‌ی ۳ نباشد؟

۱) ۲۷۲۴۰ ۲) ۲۹۱۶۰ ۳) ۲۷۳۶۰ ۴) ۲۷۶۰۰ ۵) ۲۵۲۰۰

۹. اگر $t+\frac{1}{t}$ ریشه‌ی چندجمله‌ای $x^۳+x^۲-۲x-۱$ باشد حاصل $t^۷+\frac{1}{t^۷}$ چند است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۱- ۵) $\frac{۳}{۲}$

۱۰. چند عدد طبیعی در مجموعه‌ی $\{۴,۹,۱۴,۱۹,...,۲۰۱۴\}$ دارای مجموع رقم‌های زوج است؟

۱) ۲۰۲ ۲) ۲۰۱ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۹۹ ۵) ۲۰۳

۱۱. در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم: $\hat{B}=۹۰^\circ$، $BC=۳$ و $AB=۴$. دایره‌های $w_۱$ و $w_۲$ با شعاع یکسان طوری رسم شده‌اند که $w_۱$ بر AB و AC و نیز $w_۲$ بر BC و AC مماس است. همچنین $w_۱$ و $w_۲$ بر هم مماس هستند. شعاع $w_۱$ چند است؟

۱) $\frac{۹}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$ ۵) $\frac{۵}{۴}$

۱۲. در شش‌ضلعی محدب ABCDE داریم:

الف ـ پاره‌خط‌های AC و AE زاویه‌ی $B\hat{A}F$ را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

ب ـ $BE \parallel CD$ و $CF \parallel DE$

ج ـ $AB=۲AC=۴AE=۸AF$

اگر مساحت ۴ ضلعی‌های ACDE و ADEF برابر ۲۰۱۴ و ۱۴۰۰ باشد، مساحت ABCD چند است؟

۱) ۵۷۲۰ ۲) ۳۶۰۰ ۳) ۴۹۳۷ ۴) ۱۷۹۳ ۵) ۷۲۹۵

۱۳. اگر $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$ و $r_۴$ ریشه‌های چندجمله‌ای $P=x^۴+۲x^۳-۱۳x^۲-۱۴x+۲۴$ باشد و $r_۱^۲$، $r_۲^۲$، $r_۳^۲$ و $r_۴^۲$ ریشه‌های چندجمله‌ای درجه چهارم Q(x) باشد و ضریب $x^۴$ در Q(x) برابر یک باشد، ضریب $x^۳$ در چندجمله‌ای $\frac{Q(x^۲)}{P(x)}$ چند است؟

۱) ۱۳- ۲) ۱۴+ ۳) ۲- ۴) ۱ ۵) صفر

۱۴. حاصل مجموع $\left[\frac{۲^{۱۰۰}}{۲^{۵۰}+۱}\right]+\left[\frac{۲^{۱۰۰}}{۲^{۵۰}+۲^۱}\right]+...+\left[\frac{۲^{۱۰۰}}{۲^{۵۰}+۲^{۱۰۰}}\right]$ چه باقی مانده‌ای بر ۵ دارد؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۴

۱۵. تابع $f:N\to N$ را لجوج می‌نامیم اگر به ازای همه‌ی مقادیر طبیعی x و y داشته باشیم: $f(x)+f(y)>x^۲$. اگر g تابعی لجوج باشد که در آن مجموع $g(۱)+...+g(۲۰)$ کم‌ترین مقدار خود را می‌گیرد، کم‌ترین مقدار $g(۱۴)$ کدام است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۶۱ ۳) ۱۴۲ ۴) ۱۳۶ ۵) ۳۹۶

۱۶. در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$ می‌دانیم $AB=AC$. اگر D و E وسط اضلاع AB و AC باشند و بدانیم نقطه‌ی F در امتداد DE خارج از مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ طوری قرار دارد که مثلث‌های $\overset{\Delta}{BFA}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ مشابه هستند، طول $\frac{AB}{BC}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۵) ۲

۱۷. وترهای AB و CD از دایره‌ی W در E تلاقی می‌کند، R مستطیلی در W می‌باشد که اضلاع آن موازی AB و CD می‌باشد. و هیچ نقطه‌ای داخل R روی AB و CD یا روی دایره نیست. حداکثر مقدار مساحت R چند است؟ (می‌دانیم $A\hat{E}C=۹۰^\circ$، $CD=۱۰$، $BE=۲$ و $AE=۸$)

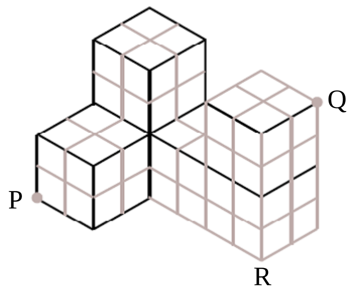
۱) $۲۶+۶\sqrt{۱۷}$ ۲) $۱۶+۴\sqrt{۱۷}$ ۳) $۲\sqrt{۱۷}$ ۴) $۳\sqrt{۱۷}$ ۵) $۲۵+۴\sqrt{۱۷}$

سؤالات پاسخ کوتاه

۶۱. اگر $S=\left\{2^x+2^y+2^z \mid x+y+z, x,y,z\in \mathbb{N}\cup\{0\}\right\}$، ۱۰۰ امین عضو S (به ترتیب) چند است؟

۶۲. برای عدد صحیح و نامنفی n، $f(n)$ را کوچکترین مقدار $|x+y|$ هایی می‌گیریم که $x,y\in\mathbb{Z}$ و $3x-2y=n$ حاصل $f(0)+f(1)+\ldots+f(213)$ به چه رقمی ختم می‌شود؟

۶۳. شکل روبه‌رو از ۴۸ قطعه مکعب به قطر $\sqrt{n}$ تشکیل شد، به طوری که هر وجه یک مکعب به دیگری متصل است. کمترین مقدار n را طوری پیدا کنید که فاصله‌ی نقاط P و Q برابر با عددی صحیح باشد؟



۶۴. اگر $a,b,c,x\in\mathbb{R}$ و بدانیم: $(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$ و نیز داشته باشیم:
$$\begin{cases}\dfrac{a^2}{a+b}=\dfrac{a^2}{a+c}+20\\[2mm] \dfrac{b^2}{b+c}=\dfrac{b^2}{b+a}+14\\[2mm] \dfrac{c^2}{c+a}=\dfrac{c^2}{c+b}+x\end{cases}$$
حاصل $|x|$ را حساب کنید.

۶۵. حسین و فرید و محمود و کامران و امید و وحید برای خرید بستنی به صف می‌ایستند. یک صف را قابل قبول نامیم اگر محمود جلوتر از فرید، فرید جلوتر از حسین و وحید جلوتر از امید و امید جلوتر از کامران قرار گیرد. به طور مثال صف زیر قابل قبول است:

«محمود، فرید، وحید، امید، کامران، حسین»

چند صف قابل قبول داریم؟

۶۶. به چند روش می‌توان ۸ رأس یک مکعب را با ۲ رنگ آبی و قرمز رنگ‌آمیزی کرد که ۲ سر هر یال قرمز نباشند؟ (دوران و بازتاب یک رنگ‌آمیزی، متمایز حساب می‌شوند)

۶۷. اگر p، q، r و s عددهای اول و متمایز باشند که $pq-rs$ بر ۳۰ بخش‌پذیر باشد، کمترین مقدار $p+q+r+s$ چند است؟

۶۸. چه تعداد نقطه‌ی (x,y,z) با مختصات صحیح در رابطه‌ی $xy-z^2=y^2z-x=14$ صدق می‌کند؟

آزمون مدارس برتر ایران

به ابتکار دبیرستان انرژی اتمی ایران

آزمــون شمــاره ۱

۲۰ آبان ۱۳۹۳

پاسخ نامه

پاسخنامه المپیــاد ریاضی

گروه طراحی و بازنگری:

نوید صفایی ـ سعید رسولی ـ سیاوش عالم‌زاده ـ سروش طالبی‌زاده

محمدرضا ارمندپور ـ احسان خرسندی ـ سپهر قدمی ـ سامان نادری

۱. **گزینه ۴ صحیح است.**

کل خطها برابر $۱۷۱ = \binom{۱۹}{۲}$ می‌باشد. خطوطی که از ۳ نقطه می‌گذارند. برابر ۴۵، خطوطی که از ۴ نقطه می‌گذرند برابر ۳۶ و خطوطی که از ۵ نقطه می‌گذرند برابر ۳۰ می‌باشد. بنابراین ۳۰ - ۳۶ - ۴۵ - ۱۷۱ = ۶۰ خط از دقیقاً ۲ نقطه می‌گذرند.

۲. **گزینه ۳ صحیح است.**

می‌توان دریافت که $\frac{۵-a}{b} = \frac{۴-b}{a} = \frac{۱۰}{a^۲+b^۲}$ در نتیجه:

$$\frac{۱۰}{a^۲+b^۲} = \frac{۴a-ab}{a^۲} = \frac{۵b-ab}{b^۲} = \frac{۴a+۵b-۲ab}{a^۲+b^۲}$$

بنابراین $۰ = ۴a \times ۵b - ۲ab - ۱۰$ یا به طور معادل $(۲a-۵)(b-۲) = ۰$ حال با جای‌گذاری $a = \frac{۵}{۲}$ به مقادیر $b = ۲ \pm \frac{۳}{۲}i$ می‌رسیم که قابل قبول نیست. اما با جای‌گذاری $b = ۲$ به مقادیر $a = ۱,۴$ می‌رسیم.

۳. **پاسخ: ۵۵۷**

می‌دانیم S، برابر با مجموعه‌ی عددهایی است که در نمایش دودویی آن‌ها دقیقاً ۳ بار عدد یک به کار رفته است. تعداد عددهای حداکثر d رقمی با این خاصیت برابر $\binom{d}{۳}$ می‌باشد. می‌دانیم $۸۴ = \binom{۹}{۳}$ و $۱۲۰ = \binom{۱۰}{۳}$ در نتیجه به دنبال ۱۶ امین عدد در مجموعه‌ی $۲^۹ + ۲^x + ۲^y$ هستیم که $۹ > x > ۶$ (صرف نظر از جمله‌ی $۲^۹$) می‌دانیم $\binom{d_۱}{۲}$ عدد به شکل $۲^x + ۲^y$ داریم که حداکثر $d_۱$ رقمی باشند با توجه به این که $۱۵ = \binom{۶}{۲}$ می‌توان فهمید ۱۰۰ امین رقم برابر $۲^۹ + ۲^۶ + ۲^۰ = ۵۵۷$

۴. **پاسخ: ۵۴**

می‌توان دریافت این عددها برابر ۲، ۳ و ۵ نیستند. با توجه به این که $pq \overset{۲,۳}{\equiv} rs$ در نتیجه $pqrs \overset{۳}{\equiv} (pq)^۲ \overset{۳}{\equiv} ۱$. در نتیجه تعداد عددهای $۳r-۱$ بین آن‌ها زوج است. به سادگی می‌توان دید $\{۷,۱۱,۱۳,۱۷\}$ جواب ؟؟؟ هستند.

۵. **گزینه ۲ صحیح است.**

شیب قطر برابر $\frac{۲}{۳}$ است. حال باید تعداد نقاط با مختصات صحیح روی خط $y = \frac{۲}{۳}x$ را حساب کنیم. یعنی نقاطی که طول آن‌ها مضرب ۳ است که تعدد آن‌ها ۱۶ تاست.

۶. **گزینه ۵ صحیح است.**

اگر از ۲ رنگ انتخاب کنیم ۲۰ حالت داریم. اگر از ۴ رنگ استفاده کنیم ۱۲۰ حالت داریم. اگر از ۳ رنگ استفاده کنیم نیز ۱۲۰ حالت داریم. پس در مجموع ۲۶۰ حالت داریم.

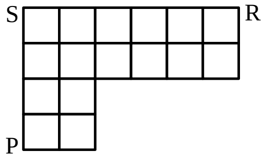
۷. **پاسخ: ۰۶**

می‌توان فهمید $f(n)$ برابر قدرمطلق باقی‌مانده‌ی $۲n$ بر ۵ می‌باشد در نتیجه $f(n) = f(n+۵m)$ بنابراین:

$$f(۰)+\dots+f(۲۱۳) = ۴۰۳\big(f(۰)+\dots+f(۴)\big) - f(۲۰۱۴)$$
$$= ۴۰۳ \times ۶ - ۲ = ۲۴۱۶$$

۸. **گزینه ۰۱۷**

تصویر از بالای مقطع به شکل زیر است. (نقطه گوشه‌ای که در شکل دیده نمی‌شود.)



$$PQ^۲ = PS^۲ + SR^۲ + RQ^۲$$

حال توجه کنید که: $PS = ۴\sqrt{n}\ ,\ SR = ۶\sqrt{n}\ ,\ PQ = ۴\sqrt{n}$

در نتیجه: $PQ = ۲\sqrt{۱۷n}$

۹. **گزینه ۴ صحیح است.**

B' را بازتاب B نسبت به AC بگیرید و C' را بازتاب C نسبت به AB. در نتیجه: $AB' = AB = ۱۰$ و $AC' = AC = ۶$ و $CD = C'D$ و $BE = B'E$ و نیز $B'\hat{A}C' = ۱۲۰^\circ$ با توجه به قانون کسینوس‌ها داریم:

$$B'C'^۲ = ۱۰^۲ + ۶^۲ - ۲\times۱۰\times۶\times۳۰ = ۱۲۰^\circ = ۱۹۶$$

پس $B'C' = ۱۴$. در نتیجه:

$$۱۴ = B'C' \le B'E + DE + C'D = BE + DE + CD$$

۱۰. **گزینه ۳ صحیح است.**

فرض کنید: $g(i) = f(i) - i$ در نتیجه باید تعداد تابع‌هایی را بیابیم که:

۱) $g(i) < g(j)$ اگر $i < j$

۲) $۱ - i \le g(i) \le ۱۳۹۳ - i$

می‌توان به شکل استقرایی ثابت کرد که اگر $g(i)$ در رابطه‌ی ۲ صدق کند، $g(i+۱)$ نیز در رابطه صدق می‌کند. بنابراین کافی است ۱۳۹۳ مقدار از بین عددهای $[-۱۳۹۲,۱۳۹۳]$ را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۲۷۸۵}{۱۳۹۳}$ طریق ممکن است.

۱۱. **گزینه ۳ صحیح است.**

فرض که: $\mathbf{۹ = Ek, b = Ej, C = jk = EB}$ مثلثهای $\mathbf{KEJ, GDH, JAK}$ مشابه هستند پس: $\mathbf{a^۲ + b^۲ = c^۲ ,\ \frac{a}{c} = ۱ - b - c, \frac{b}{c} = ۱ - a}$ در نتیجه می‌توان گفت: $\mathbf{a = \frac{c}{۲}\ ,\ c + b = \frac{۱}{۲}}$ در نتیجه

$$\mathbf{a^{۲}+b^۲ = c\frac{۳}{۴} + c\frac{۱}{۲} - c۱^۲ = c^۲ \Rightarrow c = ۲ - \sqrt{۳}}$$

۱۲. **گزینه۱ صحیح است.**

این کار به $\mathbf{۸! - ۳(۷!) + ۳(۶!) - ۵!}$ قابل انجام است.

۱۳. **گزینه ۱ صحیح است.**

می‌دانیم: $\mathbf{t \times \frac{۱}{۴}}$ ریشه‌ی معادله است در نتیجه خواهیم داشت:

$0=\left(t\times\frac{1}{t}\right)^3+\left(t\times\frac{1}{t}\right)^2-2\left(t\times\frac{1}{t}\right)-1$

$\Rightarrow t^3+t^{-3}+t^2+t^{-2}+t+t^{-1}+1=0$

$\Rightarrow t^{-3}\left(1+t+0+6\right)=0$

$\Rightarrow 1+t+0+6\Rightarrow t^7=1$

۱۴. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا تساوی را به شکل $z^2-y^3z+14(y+1)=0$ می‌نویسیم.

حال می توان فهمید: $z=\dfrac{y\pm\sqrt{y^6-56(y+1)}}{2}$

بنابراین عبارت $y^6-56(y+1)$ باید مربع کامل باشد. حال توجه کنید $\left(y^3\right)^2=y^6,\left(y^3-1\right)^2=y^6-2y^3+1$ با توجه به اینکه نابرابری $\left|56(y+1)\right|\ge 2\left(y^3\right)-1$ تنها برای $|y|\le 5$ برقرار است

می‌توان گفت تنها مقادیر y در این $y^6-56y-56$ مربع کامل باشد $y=-1,-3$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های ما برابر

$(-15,-1,-1),(-14,-1,0),(-5,-3,1),$
$(-266,-3,-28)$

هستند.

۱۵. گزینه ۲ صحیح است.

می‌دانیم ۲۰۱۴ این ویژگی را ندارد. حال مجموعه را به ۲ زیر مجموعه‌ی $\{4,14,24,\dots,2004\}$ و $\{9,19,29,\dots,2009\}$ تقسیم می‌کنیم.عددهای مجموعه‌ی اول به شکل $\overline{n4}$ و دومی به شکل $\overline{n9}$ هستند که: $n=0,\dots,200$ در نتیجه دقیقا یکی از عددهای $\overline{n9}\ \overline{n\ 4}$ دارای مجموع ارقام زوج است.

۱۶. گزینه ۳ صحیح است.

اگر o_1 و o_2 را مرکز دوایر بگیریم و r را شعاع دایره، خواهیم داشت:

$$o_1\,o_2=b_1\,b_2=2r$$

(b_1,b_2 تقاطع w_1,w_2 با Ac هستند) فرض کنید $\alpha=\dfrac{\hat{A}}{2}$ با ساخت مثلث قائم الزاویه با وترهای AO_1,O_1O_2,O_2C و اضلاعی موازی AB و BC خواهیم داشت:

$$4=AB=r\cot\alpha+2r\,c-S\hat{A}+r\cot\alpha=$$

$$\frac{1+\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{1+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=3,\cos\hat{A}+\frac{4}{5}$$

در نتیجه $4=r(3+\frac{8}{5}+1)=\frac{28}{5}r$ پس $r=\frac{5}{7}$.

۱۷. گزینه ۵ صحیح است.

مساحت مثلث **ADE** برابر ۱۰۰۷ بوده و مساحت مثلث **AFE** برابر ۱۴۰۰–۱۰۰۷=۳۹۳ می‌باشد. در نتیجه مساحت **ABCD** برابر $16\times393+1007=7295$ می باشد.

۱۸. گزینه ۳ صحیح است.

می‌دانیم: $Q\left(x^2\right)=\left(x^2-r_1^2\right)-\left(x^2-r_4^2\right)=p(x)p(-x)$

در نتیجه: $\dfrac{Q\left(x^2\right)}{p(x)}=p(-x)$.

۱۹. گزینه ۳ صحیح است.

فرض که: $a_k=\dfrac{2^{100}}{2^{50}+2^k}$ در نتیجه: $a_k+a_{100-k}=2^{50}$

می‌دانیم $a_k\,|a|-k\notin z$ بنابراین $\lfloor a_k\rfloor+\lfloor a_{100-k}\rfloor=2^{50}-1$

در نتتیجه حاصل این مجموع برابر $101\times2^{49}-50$ می‌باشد که باقی مانده‌ای برابر ۲ به ۵ دارد.

۲۰. پاسخ: ۳۴

با جمع سه رابطه نتیجه می‌شود:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}-\frac{a^2}{a+c}-\frac{b^2}{b+a}-\frac{c^2}{c+b}=0$$

در نتیجه: $x=-34\ ,\ x+34=0$

۲۱. پاسخ: ۲۰

اگر جایگاه محمود، فرید و حسین معلوم شود، جایگاه کل بچه‌ها معلوم می‌شود. برای جایگاه این سه نفر $\binom{6}{3}=20$ حالت داریم.

۲۲. گزینه ۴ صحیح است.

فرض کنید: $Sy=y(1)+....y(2)$ حال می‌توان گفت:

$$Sy=\left(y(1)+y(20)\right)+....+\left(y(10)+y(11)\right)$$

$$\ge\left(20^2+1\right)+....+\left(11^2+1\right)=10+11^2=+20^2=2495$$

تساوی وقتی رخ می‌دهد که $y(1)=y(2)=....=y(10)$ زیرا باید داشته باشیم:

$$y(1)+y(20)=20^2+1,....,y(10)+y(11)=11^2+1$$

اگر $y(1)\langle y(2)$ در این صورت $y(1)+y(1)\langle 19^2+1$ که تناقض است.

اگر $y(2)\langle y(1)$ نیز خواهیم داشت: $y(2)+y(20)\langle 20^2+1$ در نتیجه $y(2)-y(1)$ با استدلالی مشابه می‌توان گفت $y(1)=y(2)-.....-y(1)$ فرض کنید. $y(1)=a$ در نتیجه برای هر $n\ge11$: $y(n)=n^2+1-a$ با توجه به این که $y(1)+y(11)\langle 11^2$ می‌توان گفت: $y(11)\rangle y1$ پس: $y(11)=11^2+1-a\ge61\ \rightarrow\ a\le61$ بنابراین حداقل مقدار $y(1E)$ برابر $14^2+1-61=136$ می‌باشد.

۲۳. پاسخ ۳۵

اگر تعداد رئوس قرمز برابر صفر باشد، تنها یک حالت داریم. اگر برابر یک باشد ۸ حالت داریم. اگر برابر ۲ باشد ۱۶، اگر برابر ۳ باشد ۸ و اگر برابر ۴ باشد ۲ حالت داریم. پس در مجموع ۳۵ حالت داریم.

۲۴. گزینه ۱ صحیح است.

فرض کنید: $\mathbf{AB = ۲x, BC = ۲g, \alpha = A\hat{B}C = A\hat{C}B}$ بنـابراین $\mathbf{AD = DB = AE = EC = X}$ ونیز $\mathbf{DE = y}$ بنابراین ۲ مثلث $\mathbf{BFA, ABC}$ مساوی هستند.

در نتیجه: $\mathbf{BF = BA = ۲X, FA = ۲y, D\hat{A}F = \alpha}$ با توجه بـه لـوزی DE و BC داریـم: $\mathbf{A\hat{D}F = \alpha}$ و بـا تشـابه مثلث‌هـای $\mathbf{ABC, FAD}$ خواهیم داشت:

$$\frac{۲y}{x} = \frac{FA}{AD} = \frac{AB}{BC} = \frac{۲x}{۲y} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \sqrt{۲}$$

۲۵. گزینه ۱ صحیح است.

می‌دانیم: $\mathbf{CE + ED = CD = ۱۰\ ,\ CE.ED = AE.EB = ۱۶}$
در نتیجـه $\mathbf{ED, CE}$ برابـر ۲ و n هسـتند. فـرض کنیـد $\mathbf{CE = ۸, DE = ۲}$ فرض کنید مرکز دایره مبـدأ باشـد ومعادلـه‌ی دایـره برابـر $\mathbf{x^۲ + y^۲ = ۳۴}$ باشـد. واضـح اسـت کـه مسـتطیل بـا بزرگترین مساحت باید در ربع ول باشد. اگر $\mathbf{(x, y)}$ مختصات بالاترین گوشه‌ی مستطیل باشد، مساحت مستطیل برابر است با:

$$(x+۳)(y+۳) = ۹ + ۶(x+y) + xy \le ۹ + ۱۲\sqrt{\frac{x^۲+y}{۲}} + \frac{x^۲+y^۲}{۲} = [۶ + ۶\sqrt{۱۷}]$$

حالت تساوی وقتی است که: $\mathbf{x = y = \sqrt{۱۷}}$.