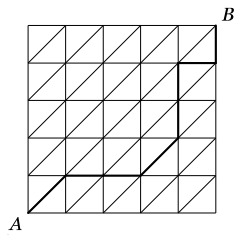


مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱) در دبیرستان «هجرت نو» یک آزمون هماهنگ بین تمامی دانش‌آموزان برگزار شده است. این آزمون شامل دو درس فیزیک و ریاضی است و رتبه‌ی کل هر داوطلب، با توجه به حاصل جمع نمره‌ی ریاضی و نمره‌ی فیزیک وی نسبت به سایر دانش‌آموزان محاسبه می‌شود. اگر امین در درس ریاضی رتبه‌ی هفتم و در درس فیزیک رتبه‌ی یازدهم را کسب کند، بدترین رتبه‌ی کلی که می‌تواند داشته باشد کدام است؟ (توجه: در هیچ درسی دو نفر نمره‌ی مساوی نگرفته اند).

الف) نوزدهم ب) یازدهم ج) هجدهم د) شانزدهم ه) هفدهم



۲) در شکل مقابل اگر از هر نقطه بتوان به نقطه‌ی بالایی، راستی و بالا راستی رفت، چند مسیر به طول ۸ واحد از A به B وجود دارد؟ یکی از این مسیرها در شکل نشان داده شده است.

الف) ۲۰۰ ب) ۲۱۰ ج) ۲۳۰ د) ۵۶۰ ه) ۳۱۵۰

۳) یک جدول ۵×۵ را «منظم» می‌گوییم اگر و فقط اگر در هر خانه‌اش یک عدد نوشته شده باشد و در ۲۵ خانه‌اش همه‌ی اعداد ۱ تا ۲۵ آمده باشند. یک جدول ۵×۵ را «خوش سطر» می‌گوییم اگر و فقط اگر حاصل ضرب ۵ عدد واقع در هر سطرش نه بر ۳۴ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳۸. به همین صورت یک جدول ۵×۵ را «خوش ستون» می‌گوییم اگر و فقط اگر حاصل ضرب ۵ عدد واقع در هر ستونش نه بر ۳۴ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳۸. چند جدول مختلف ۵×۵ داریم که هم خوش سطر باشد و هم خوش ستون؟

الف) $۱۱! \times ۱۲! \times ۲۰۰$ ب) $۲۵!$ ج) ۱۰ د) $۵!$ ه) $۱۲ \times ۱۰! \times ۱۳!$

۴) عدد $x_۵ \times ۱۶ + x_۴ \times ۸ + ۴ \times x_۳ + ۲ \times x_۲ + ۲ \times x_۱ + x_۰ = x$ را در نظر بگیرید که در آن رقم‌های $x_۰, \dots, x_۵$ صفر یا یک هستند. معین کنید که برای چند مقدار مختلف x بیش از یک ۶-تایی $(x_۰, x_۱, \dots, x_۵)$ وجود دارد به طوری که در معادله‌ی فوق صدق کند.

الف) ۱۶ ب) ۲۴ ج) ۳۰ د) ۳۲ ه) ۳۴

۵) محمدحسین می‌خواهد یک نمایشگاه وسایل خانگی را برق‌کشی کند. متأسفانه در کل این نمایشگاه تنها یک پریز برق وجود دارد. البته محمدحسین فکر این‌جا را کرده و با خود تعداد زیادی n راهی آورده است. به یک n -راهی ($n \geq ۱$) می‌توان n تا دوشاخه‌ی برق وصل کرد و یک دوشاخه دارد که باید به طریقی (مستقیم به پریز یا توسط n -راهی‌های دیگر) به برق وصل شود تا دوشاخه‌هایی که بدان وصلند را برق‌دار کند. اگر محمدحسین ده تا ۱۰ راهی، هفت تا ۷ راهی، پنج تا ۴ راهی، چهار تا ۲ راهی و صد تا ۱ راهی داشته باشد، حداکثر چند وسیله‌ی خانگی را می‌تواند به برق متصل کند؟

الف) ۱۵۰ ب) ۱۵۲ ج) ۱۲۶ د) ۱۲۷ ه) هیچ‌کدام

۰	۱	۱
۱	۱	۰
۱	۰	۱

۶) جدول 3×3 روبه‌رو داده شده است. در هر حرکت می‌توانیم جای دو سطر یا جای دو ستون از این جدول را با هم عوض کنیم. با این حرکات به چند جدول مختلف می‌توان رسید؟

- الف) ۱۲ ب) ۴۲ ج) ۸۴ د) ۶ ه) ۳۶

۷) بازی سه‌نفره‌ی «عددسازی» به این صورت انجام می‌شود: ۳ نفر دور یک میز گرد می‌نشینند و به هر یک از آن‌ها یک کارت داده می‌شود که روی آن ۰ یا ۱ نوشته شده است. در ابتدا بازی کنی که از دیگران بزرگ‌تر است یک رقم دل‌خواه ۰ یا ۱ روی میز می‌نویسد و سپس به ترتیب ساعت‌گرد نوبت عوض می‌شود. هر کس در نوبت خود آخرین رقمی که روی میز نوشته شده را بررسی می‌کند. اگر ۰ بود رقم سمت راست کارتش و اگر ۱ بود رقم سمت چپ کارتش را در سمت راست عدد روی میز می‌نویسد. بازی آن‌قدر ادامه پیدا می‌کند تا کوچک‌ترین بازی‌کن خسته شود. تعیین کنید در بازی عددسازی چند تا از اعداد زیر ممکن است تولید شوند؟

۰۰۰۰۱۱۱۱۰۰۰۰ ۰۱۱۱۰۰۰۱۱۱۰ ۰۰۱۱۱۰۰۱۱۱۰۰ ۰۰۱۱۰۰۱۱۰۰ ۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۸) فرض کنید $100 = 64x_3 + 16x_2 + 4x_1 + x_0$ باشد. اگر هر یک از x_0, x_1, x_2, x_3 از مجموعه‌ی $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ انتخاب شده باشد، کمینه‌ی مقدار $x_0 + x_1 + x_2 + x_3$ کدام است؟

- الف) ۲ ب) -۱ ج) ۵ د) ۰ ه) ۱

۹) بهروز، سیامک و علی هر یک مالک یک دستگاه خودرو هستند. مدل این خودروها پراید، پژو و دوو می‌باشد. رنگ یکی از این ماشین‌ها سیاه، دیگری سفید و سومی طوسی است. می‌دانیم که ماشین علی جلوی پراید و ماشین سفید پشت پراید پارک است، دوو طوسی رنگ است و نیز ماشین سیامک سیاه نیست. نوع و رنگ ماشین متعلق به هر یک از این افراد کدام است؟

- الف) (بهروز، پراید سفید)، (علی، پژو سیاه) و (سیامک، دوو طوسی)
 ب) (بهروز، پژو سفید)، (علی، پراید سیاه) و (سیامک، دوو طوسی)
 ج) (بهروز، پژو سیاه)، (علی، دوو طوسی) و (سیامک، پراید سفید)
 د) (بهروز، پراید سیاه)، (علی، دوو طوسی) و (سیامک، پژو سفید)
 ه) (بهروز، پراید سیاه)، (علی، پژو طوسی) و (سیامک، دوو سفید)

۱۰) یک جدول 8×8 داریم که ۳۲ خانه‌ی ۴ ستون اولش سیاه و ۳۲ خانه‌ی دیگرش سفید هستند. در هر حرکت می‌توانیم رنگ دو خانه‌ی مجاور را با هم عوض می‌کنیم (در صورتی که هم‌رنگ باشند تغییر در رنگشان رخ نمی‌دهد). دو خانه مجاورند اگر و فقط اگر ضلع مشترک داشته باشند. کم‌ترین تعداد حرکت لازم برای شطرنجی کردن جدول چند است؟ جدولی شطرنجی است که رنگ هیچ دو خانه‌ی مجاوری در آن یکی نباشد.

- الف) ۱۰۰ ب) ۴۸ ج) ۳۲ د) ۱۲۸ ه) ۶۴

(۱۱) شایان دوستانش را برای جشن تولدش به پارک دعوت کرده است. او قصد دارد تعدادی پیتزا برای آن‌ها بخرد. بعضی از دوستان او عادت به خوردن یک پیتزای کامل ندارند به همین دلیل او از قبل از دوستانش پرسیده که هر کدام چه اندازه‌ای از یک پیتزا را می‌خورد. ۱۱ نفر از آن‌ها گفته‌اند که هر کدام یک پیتزای کامل می‌خورند، ۹ نفر هر کدام $\frac{2}{3}$ پیتزا می‌خورند، ۱۳ نفر هر کدام $\frac{1}{3}$ پیتزا و ۵ نفر هر کدام $\frac{1}{6}$ پیتزا می‌خورند. در ضمن هر یک از دوستانش علاقه دارد پیتزای خواسته شده‌اش، در یک قطعه‌ی به هم چسبیده به او داده شود. شایان می‌خواهد حداقل تعداد پیتزا را از پیتزا فروشی بخرد. به نظر شما شایان چند تا پیتزای کامل باید بخرد تا بتواند به هر نفر مطابق میلش غذا بدهد؟

الف) ۲۵ (ب) ۲۸ (ج) ۲۷ (د) ۲۶ (ه) ۳۰

(۱۲) ۱۰ نفر دور یک میز دایره‌ای نشسته‌اند. هر نفر یا دروغ‌گوست یا راست‌گو؛ دروغ‌گو همیشه دروغ می‌گوید و راست‌گو همیشه راست است. هر نفر گفته است که شخص سمت راستش دروغ‌گوست یا راست‌گو. ما می‌خواهیم به این ۱۰ نفر صفت راست‌گویی و دروغ‌گویی نسبت دهیم به طوری که با گفته‌هایشان مطابقت داشته باشد. حداکثر چند طریق برای صفت نسبت دادن به این ۱۰ نفر وجود دارد؟

الف) ۱ (ب) ۲۱۰ (ج) ۲۵ (د) ۲ (ه) ۴

(۱۳) عدد $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ ($a_1 \neq 0$) را عدد «خالی‌بند» می‌گوییم اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ عدد $\overline{a_1 a_2 \dots a_i}$ بر عدد i بخش‌پذیر باشد. مثلاً ۱۲۹ خالی‌بند است. به‌ازای چند تا از مقادیر ۵، ۷، ۸ و ۹ برای n عدد خالی‌بند n رقمی وجود دارد؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

(۱۴) رشته‌ای از حروف الفبای انگلیسی داده شده است. در هر مرحله، می‌توان یکی از دو عمل زیر را انجام داد:

- جای دو حرف را در رشته به‌دل‌خواه تغییر داد؛
- دو حرف الفبا را (مانند c_1 و c_2) انتخاب کرده، و سپس تمام حروف c_1 در رشته‌ی مورد نظر را به c_2 تغییر داده و بالعکس.

دو نمونه در این جا ذکر می‌کنیم: با انجام عمل اول می‌توان از SALAM به رشته‌ی SALMA رسید. با انجام عمل دوم می‌توان از SALAM به ASLSM و BALAM رسید. در کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌توان با انجام تعدادی از حرکات فوق‌الذکر، از رشته‌ی اول به رشته‌ی دوم رسید؟

الف) SALAM \leftarrow MASWQ (ب) ABCDDDEFF \leftarrow ZYXXWQQP (ج) HHIJJJJJKHOL \leftarrow UDHQOYQOYOY (د) IDKLMLJMJM \leftarrow UOOQWERPPP (ه) IDJKER \leftarrow QWKIOPX

(۱۵) اعداد ۱ تا n را به ترتیب لغت‌نامه‌ای مرتب کرده‌ایم. جای‌گاه عدد k ($1 \leq k \leq n$) را با $Q_{n,k}$ نمایش می‌دهیم. به‌عنوان نمونه n را برابر ۱۳ قرار می‌دهیم و اعداد به‌صورت زیر مرتب می‌شوند (از چپ به راست):

۱, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹

لذا $Q_{13,10} = ۲$ و $Q_{13,2} = ۶$ می‌باشد. کوچک‌ترین n را بیابید که $Q_{n,123} = ۲۰۰$ شود.

الف) ۱۱۶۹ (ب) ۱۱۷۱ (ج) ۱۱۷۳ (د) ۱۱۷۵ (ه) امکان‌پذیر نیست

۱۶) نظام عددی مبنای 10^- ، مفروض است. وزن هر رقم در این جا نیز هم چون نظام دهمی، بسته به جای گاهش توانی از 10^0 می باشد؛ با این تفاوت که وزن ارقامی که توان فردی از 10^0 است، منفی می باشد. مثلاً ارزش عدد سه رقمی 123 در این نظام برابر $3 \times 10^0 - 2 \times 10^1 + 1 \times 10^2$ است. عدد ده رقمی $x = 1999999999$ در این نظام مفروض است. مطلوب است مجموع ارقام عدد y در این نظام، به طوری که $y = -x$.

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۱۷ د) ۴۵ ه) ۸۲

۱۷) روی تخته تعدادی عدد طبیعی نوشته شده است. در هر مرحله یک عدد روی تخته مانند a ($a > 1$) را پاک می کنیم و به جای آن $\lfloor a/2 \rfloor$ و $\lceil a/2 \rceil$ را می نویسیم. این کار را آن قدر ادامه می دهیم تا همه ی اعداد روی تخته برابر با ۱ شوند. حال فرض کنید در ابتدا فقط عدد n روی تخته نوشته شده باشد. تعداد اعداد متفاوتی که در طول عملیات فوق روی تخته نوشته می شود را $f(n)$ بنامید. مثلاً $f(7) = 5$ ، زیرا ابتدا به جای ۷، دو عدد ۳ و ۴ را می نویسیم. سپس به جای ۴، ۲ تا ۲ و به جای ۳، ۱ و ۲ را می نویسیم. در پایان نیز به جای هر ۲، دو تا ۱ می نویسیم. بنابراین ۵ عدد مختلف ۱، ۲، ۳، ۴ و ۷ در طول این عملیات روی تخته نوشته می شوند. بزرگ ترین مقدار $f(n)$ به ازای $1 \leq n \leq 4000$ چند است؟

الف) ۲۳ ب) ۳۱ ج) ۲۱ د) ۱۹ ه) ۲۰۰۰

۱۸) ۳ عدد a ، b و c روی تخته نوشته شده اند. آرش و ایمان به این ترتیب با این سه عدد بازی می کنند که هر کس در نوبت خود دو عدد دلخواه از این سه عدد، مثلاً a و b را از روی تخته پاک می کند و دو عدد $a+b$ و $a-b$ را به جای آن ها می نویسد. آرش بازی را شروع می کند. آرش و ایمان به طور یک در میان بازی می کنند. آرش می خواهد کار را به جایی برساند که هر سه عدد نوشته شده روی تخته بر ۳ بخش پذیر باشند و ایمان می خواهد جلوی این کار را بگیرد. به ازای چند تا از سه تایی های زیر به عنوان مقادیر اولیه ی (a, b, c) ، آرش می تواند به هدف خودش برسد.

$(1, 2, 10), (2, 3, 6), (3, 1, 4), (5, 6, 7), (100, 1000, 10000)$

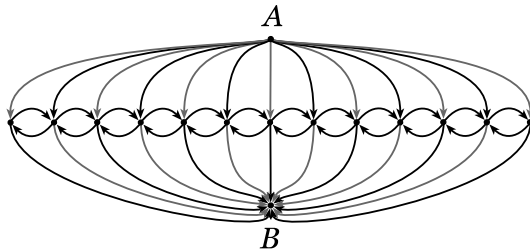
الف) ۱ ب) ۴ ج) ۲ د) ۰ ه) ۵

۱۹) عدد r رقمی $\overline{a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1}$ مفروض است (a_1 کم ارزش ترین رقم است). اگر $\overline{a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1} = 4 \times \overline{a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_r}$ و $a_1 = 8$ باشد، مقدار a_{r-1} چیست؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۹ د) ۷ ه) ۴

۲۰) آیدین و محمد روی یک جدول $k \times k$ ($k \geq 5$) بازی «بایوب» را انجام می دهند. بازی به این صورت است که هر کس در نوبت خودش یک عدد گویا در یکی از خانه های خالی جدول قرار می دهد تا تمام خانه های جدول پر شود. اگر پس از پر شدن جدول، حاصل جمع خانه های یک سطر با حاصل جمع خانه های یک ستون برابر شود، محمد، و در غیر این صورت، آیدین برنده است. اگر در دور اول، آیدین شروع کننده ی بازی باشد و در دور دوم، محمد بازی را آغاز کند و نیز هر بازی کن در هر حرکت به ترین بازی اش را ارائه دهد، تعیین کنید به ترتیب چه کسی برنده ی دور اول و دور دوم خواهد شد؟

الف) محمد، آیدین ب) محمد، محمد ج) آیدین، آیدین د) آیدین، محمد ه) به مقدار k بستگی دارد



(۲۱) در شکل مقابل، هر کدام از ۱۵ نقطه نشان‌دهنده‌ی یک شهر و هر کدام از ۵۰ پاره‌خط فلش‌دار، نشان‌دهنده‌ی یک جاده‌ی یک‌طرفه می‌باشد.

یک مسیر، دنباله‌ای از جاده‌های متوالی است که از شهر A شروع شده و به شهر B برسد و هر شهر، حداکثر یک‌بار در آن ظاهر شود. طول یک مسیر برابر تعداد جاده‌هایی است که در آن مسیر قرار دارند. تعداد مسیرهای به‌طول فرد منهای تعداد مسیرهای به‌طول زوج برابر است با:

الف) ۱۳- ب) ۱۳ ج) ۱ د) ۰ ه) ۱-

(۲۲) ماشین «قارقوری» که برای نمایش اعداد طبیعی به‌کار می‌رود، از ۹ کلید و ۹ کارت‌خوان تشکیل شده است. برای کار با «قارقوری»، ابتدا باید ۹ عدد صحیح مثبت روی ۹ کارت تمیز نوشته و در کارت‌خوان‌های ماشین قرار دهیم، سپس با روشن و خاموش کردن کلیدهای آن، به عدد مورد نظر برسیم. می‌دانیم عددی که «قارقوری» به‌عنوان خروجی نمایش می‌دهد برابر است با: $n = s_1 \times v_1 + s_2 \times v_2 + \dots + s_9 \times v_9$ که v_i عدد نوشته‌شده روی کارت i ام بوده و مقدار s_i در صورتی که کلید i ام روشن باشد برابر یک و در صورتی که خاموش باشد، برابر منفی یک است.

وهاب قصد دارد از این ماشین برای نمایش اعداد طبیعی مختلف استفاده کند. می‌دانیم وهاب، مقادیر اولیه‌ی کارت‌ها را تنها یک‌بار و آن‌هم در آغاز کار با دستگاه می‌تواند تعیین کند و از آن به بعد صرفاً با تغییر وضعیت کلیدها قادر به تغییر مقدار خروجی خواهد بود. حداکثر مقدار k را بیابید که وهاب بتواند طوری مقادیر کارت‌ها را در ابتدا تعیین کند که تنها با تغییر دادن حالت کلیدها قادر به نمایش تمام اعداد ۱ تا k باشد.

الف) ۹ ب) ۸۱ ج) ۵۱۱ د) ۱۹۶۸۲ ه) هیچ‌کدام

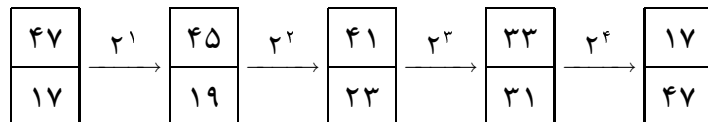
(۲۳) آقای «ب» به‌تازگی یک کیف سامسونت خریده است که رمز آن از سه گردونه‌ی ارقام تشکیل شده است که اعداد ۰ تا ۹ به‌ترتیب روی هر کدام از آن‌ها نوشته شده‌اند. آقای «ب» در هر حرکت می‌تواند یک، دو یا سه گردونه را هم‌زمان یک واحد به جلو یا عقب بچرخاند؛ در این صورت اعداد روی گردونه‌های چرخانده شده به ترتیب یک واحد زیاد یا یک واحد کم می‌شوند. دقت کنید که اگر گردونه‌ای مقدار ۹ را داشته باشد و یک واحد به جلو چرخانده شود، مقدار آن صفر شده و نیز اگر گردونه‌ای مقدار صفر را داشته باشد و یک واحد به عقب چرخانده شود، مقدار آن ۹ می‌شود. برای مثال، آقای «ب» می‌تواند مطابق شکل زیر، رمز کیفش را در ۴ حرکت از ۳۲۴ به صفر تبدیل کند:



اگر حداقل تعداد حرکات لازم برای تبدیل عدد سه‌رقمی x به سه رقم صفر را $f(x)$ بنامیم، حداکثر مقدار $f(x)$ برای تمام مقادیر $100 \leq x \leq 999$ ، برابر است با:

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۵

۲۴) اعداد ۰ تا ۶۴ به جز عدد ۳۲ در خانه‌های یک جدول که دارای ۲ سطر و ۳۲ ستون است به نحوی نوشته شده‌اند که اعداد ۰ تا ۳۱ در سطر پایین قرار دارد و مجموع دو عدد هر ستون نیز برابر ۶۴ است. در هر مرحله می‌توانیم یک ستون را انتخاب کرده و از عدد خانه‌ی بالایی آن ستون، عدد 2^k ($k \geq 0$) را کم کرده و به عدد پایینی همان ستون اضافه کنیم. هدف این است که پس از تعدادی مرحله به جدولی برسیم که جای اعداد هر ستون آن نسبت به جدول اولیه تعویض شده باشد. برای مثال، در ستونی که اعداد ۴۷ و ۱۷ روبه‌روی هم نوشته شده‌اند، می‌توان پس از ۴ حرکت مطابق شکل زیر جای دو عدد را عوض کرد:

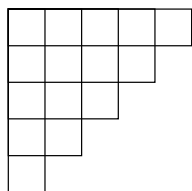


حداقل تعداد مراحل لازم برای تعویض دو عدد تمام ستون‌ها با هم‌دیگر و رسیدن به جدولی که نسبت به جدول ابتدایی قرینه شده باشد، برابر است با:

- الف) ۳۳ ب) ۷۹ ج) ۸۰ د) ۸۱ ه) ۱۹۳

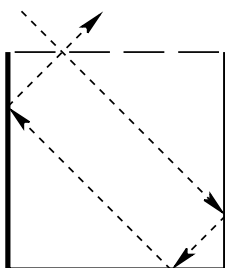
۲۵) همان مسئله‌ی قبل را در حالتی در نظر بگیرید که به جای ۳۲ ستون، ۳ ستون که به ترتیب در آن‌ها اعداد «۶۳ و ۱»، «۴۷ و ۱۷» و «۵۵ و ۹» نوشته شده است، داشته باشیم و بتوان از عدد پایینی هم عدد 2^k ($k \geq 0$) را کم کرده و به عدد بالایی اضافه کرد. در این حالت حداقل تعداد مراحل برای تعویض دو عدد هر ۳ ستون، برابر است با:

- الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۲



۲۶) با روی هم چیدن تعدادی مکعب واحد یک حجم سه‌بعدی را ایجاد کرده‌ایم. تنها می‌دانیم که اگر از هر یک از شش جهت پایین، بالا، راست، چپ، جلو و عقب از این حجم عکس بگیریم، دوران‌ها و تقارن‌هایی از شکل روبرو ایجاد می‌شوند. به نظر شما در ساخت این حجم حداکثر از چند مکعب استفاده شده است؟

- الف) ۴۸ ب) ۳۲ ج) ۵۱ د) ۴۲ ه) ۳۵

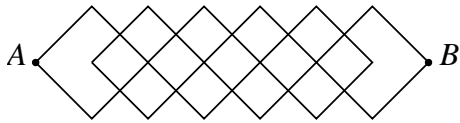


۲۷) شکل روبه‌رو یک مستطیل آینه‌ای به ابعاد 4×4 آینه‌ای را نشان می‌دهد که روی سطح بالایی آن ۵ سوراخ (با احتساب گوشه‌ها) با فواصل مساوی از هم تعبیه شده‌اند. یک سوراخ را طلایی می‌گوییم اگر پس از تاباندن یک پرتو نور از آن سوراخ با زاویه‌ی ۴۵ یا ۱۳۵ درجه نسبت به ضلع بالایی مستطیل آن پرتو بعد از دقیقاً یک بار برخورد به ضلع پایین مستطیل دقیقاً از همان سوراخ ورودی، خارج شود. دقت کنید که اگر یک پرتو به یکی از دو کنج پایینی برسد، چون بازتابش روی خودش می‌افتد، ناپدید می‌شود ولی اگر به یکی از دیواره‌ها یا کف برخورد کند، با ۹۰ درجه چرخش، بازتاب یافته و مسیرش را ادامه می‌دهد. مجموع تعداد سوراخ‌های طلایی در سه جدول « 1384×1384 »، « 2006×1384 » و « 4152×1384 » چند است؟ بدیهی است که یک جدول « $n \times m$ »، $m + 1$ سوراخ (با احتساب گوشه‌ها) دارد.

- الف) صفر ب) ۱۳۸۳ ج) ۲۷۶۶ د) ۴۱۴۹ ه) هیچ کدام

۲۸) مهدی و مرتضی روی یک جدول 5×5 «فوزبازی» می‌کنند. این بازی به این صورت است که در ابتدا در خانه‌ی وسط جدول یک لوبیا قرار دارد و هر کس در نوبت خودش در یکی از خانه‌های خالی جدول یک لوبیا قرار می‌دهد. اولین کسی که کاری کند که سه لوبیا در سه خانه‌ی متوالی روی یک سطر، ستون یا قطر قرار بگیرند، برنده‌ی بازی می‌شود. از آن‌جا که این بازی بسیار پرهیجان است، حسن برای این بازی 100 تومان جایزه تعیین کرده است که در صورتی که در پایان بازی، k لوبیا در خانه‌های جدول قرار داشته باشد، k تومان به بازنده و $100 - k$ تومان به برنده می‌دهد! اگر مهدی اولین لوبیا را (بعد از لوبیای اولیه‌ی خانه‌ی وسط) روی جدول قرار بدهد و هر دو بازی‌کن به‌ترین بازی‌شان را انجام بدهند، برنده و حداکثر جایزه‌ی وی کدام گزینه است؟

الف) مرتضی، ۸۹ (ب) مهدی، ۹۲ (ج) مهدی، ۹۴ (د) مرتضی، ۹۳ (ه) هیچ‌کدام



۲۹) در شکل مقابل، اگر بتوان از روی خطوط فقط در جهت چپ‌به‌راست حرکت کرد، تعداد مسیرهای مختلف بین A و B برابر است با:

الف) ۵۴ (ب) ۸۱ (ج) ۱۶۲ (د) ۲۴۳ (ه) ۴۸۶

۳۰) ۲۴ نفر با شماره‌های ۱ تا ۲۴ در یک ردیف کنار هم ایستاده‌اند (شماره‌ی فرد سمت چپ ۱ است). در دست هر کدام یک عدد کارت قرار دارد که روی آن یکی از دو شماره‌ی ۰ یا ۱ نوشته شده است. شماره‌ی روی کارت‌ها از چپ به راست به صورت زیر است:

$$\underbrace{00 \dots 00}_8 \underbrace{10101010}_8 \underbrace{00 \dots 00}_8$$

تعدادی سوت (با شماره‌های ۱، ۲، ...) زده می‌شود. به محض شنیدن سوت شماره‌ی s ، نفر شماره‌ی i ($1 \leq i \leq 24$) دقیقاً به صورت زیر عمل می‌کند:

- اگر s فرد باشد: اگر i فرد است، او کارت خود را به نفر بعدی (شماره‌ی $i + 1$) و اگر i زوج است کارت خود را به نفر قبلی (شماره‌ی $i - 1$) نشان می‌دهد.
- اگر s زوج باشد: اگر i زوج است، او کارت خود را به نفر بعدی در صورت وجود (شماره‌ی $i + 1$) و اگر i فرد است کارت خود را به نفر قبلی در صورت وجود (شماره‌ی $i - 1$) نشان می‌دهد.
- دو نفر که کارت‌های خود را به هم نشان می‌دهند، اگر سمت راستی مقدار ۰ و سمت چپی مقدار ۱ داشته باشند، این دو نفر کارت‌های خود را با هم عوض می‌کنند.

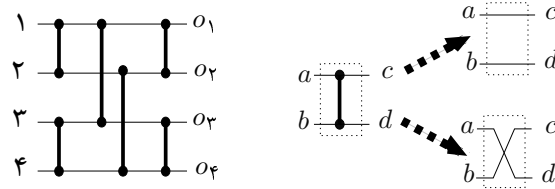
دقیقاً پس از چندمین سوت کارت‌ها به صورت مرتب $11 \dots 11 \dots 0011 \dots 00$ در می‌آید؟

الف) ۱۶ (ب) ۱۲ (ج) ۸ (د) ۷ (ه) ۱۵

۳۱) تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ که مجموع اعضای هر یک از آن‌ها بر ۳ بخش پذیر باشد چند تاست؟ (مجموع اعضای مجموعه‌ی تهی صفر است.)

الف) ۴۴ (ب) ۳۹ (ج) ۴۰ (د) ۴۹ (ه) ۳۶

۳۲) مدار زیر با چهار ورودی و ۶ «سویچ» را در نظر بگیرید. هر سویچ می تواند مستقل از بقیه‌ی سویچ‌ها در دو حالت «مستقیم» یا «ضربداری» قرار گیرد. چنانچه در شکل نشان داده شده است، اگر سویچ در حالت مستقیم باشد دو سر ورودی‌اش را مستقیماً به دو سر خروجی‌اش وصل می کند. در حالت ضربداری، سویچ این کار را به صورت ضربداری انجام می دهد.



اگر ورودی از بالا به پایین ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد، با قرار دادن سویچ‌ها در حالات مختلف در نهایت خروجی از بالا یک جای گشت خاص از اعداد ۱ تا ۴ خواهد شد.

در مدار شکل بالا کدامیک از جای گشت‌های زیر (از بالا به پایین) قابل تولید نیست؟

- (الف) $\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{matrix}$ (ب) $\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$ (ج) $\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$ (د) $\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}$ (ه) هیچ کدام، همه‌ی این موارد را می توان تولید کرد

۳۳) یک جدول 1×7 خالی داریم که به خانه‌های آن از سمت چپ به راست، شماره‌های ۰ تا ۶ را نسبت داده‌ایم. می خواهیم عناصر a, b, g را به آن اضافه کنیم و برای هر کدام، یک مکان اولیه مطابق جدول روبه‌رو در نظر گرفته‌ایم. عناصر مذکور به ترتیب دلخواه برای درج به جدول وارد می شوند. اگر مکان اولیه‌ی عنصر x برابر k باشد (مثلاً برای a این مقدار برابر ۳ است)، به ترتیب مکان‌های $k, (k+1) \bmod 7, (k+2) \bmod 7, \dots, (k+6) \bmod 7$ را بررسی می کنیم و x را در اولین مکان خالی قرار می دهیم. می دانیم $i \bmod z$ باقی مانده‌ی تقسیم صحیح عدد i بر عدد z است. به ازای ترتیب‌های مختلف اضافه کردن عناصر a, b, \dots, g به جدول، کدام یک از حالت‌های زیر نمی تواند حاصل شود؟

مکان اولیه	عنصر
۳	a
۵	b
۳	c
۴	d
۵	e
۶	f
۳	g

- (الف) $\begin{matrix} e & f & g & a & c & b & d \end{matrix}$ (ب) $\begin{matrix} c & e & b & g & f & d & a \end{matrix}$
 (ج) $\begin{matrix} b & d & f & a & c & e & g \end{matrix}$ (د) $\begin{matrix} c & g & b & a & d & e & f \end{matrix}$
 (ه) هیچ کدام، تمام موارد می توانند باشند

۳۴) در جریان یک مذاکره دو گروه ۱۰ نفری در دو طرف یک میز نشسته‌اند. هر نفر از هر کدام از گروه‌ها دقیقاً روبه‌روی یک نفر از گروه دیگر قرار دارد. در این مذاکره رأس هر ساعت به افراد مذاکره کننده چای تعارف می شود. سر هر ساعت هر مذاکره کننده به افراد گروه دیگر به جز کسی که روبه‌روی او نشسته است (۹ نفر) نگاه می کند. اگر از این تعداد فردی از این افراد در ساعت قبل چای نوشیده بودند این فرد در این ساعت چای خواهد نوشید ولی اگر تعداد زوجی از آن‌ها در ساعت قبل چای نوشیده بودند وی چای نخواهد نوشید. می دانیم که رأس ساعت اول، ۱۳ نفر از مجموع ۲۰ نفر چای خورده‌اند، چند نفر از این ۲۰ نفر در ساعت ۲۵۷۳ ام چای خواهند خورد؟

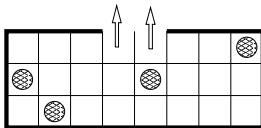
- (الف) ۱۳ (ب) ۱۰ (ج) ۲۰ (د) ۶ (ه) ۷

۳۵) ماشینی داریم که با فشار دادن دکمه‌ی «نمایش» آن، همه‌ی اعدادی که در خود دارد را یک‌به‌یک و بدون ترتیب خاصی به ما نشان می‌دهد و این کار را اگر بخواهیم تکرار می‌کند، ولی ممکن است همان ترتیب قبلی نباشد. ما فقط یک ماشین حساب معمولی (با امکان ضرب، تقسیم، جمع و تفریق و نیز تعداد ۱۰ تا حافظه‌ی کمکی) در دست داریم و اجازه نداریم عددی که ماشین نشان می‌دهد را بر روی برگه یادداشت کنیم یا به‌خاطر بسپاریم. این را نیز می‌دانیم که ماشین همه‌ی اعداد ۱ تا n را نشان می‌دهد، به‌جز دو عدد x و y . ما از قبل مقدار x و y را نمی‌دانیم.

با چند بار فشار دادن دکمه‌ی «نمایش»، می‌توانیم مقدارهای x و y را پیدا کنیم. فرض کنید که $n \leq 10000$ و ماشین حساب تا اعداد 10^{10} را می‌تواند در خود ذخیره کند و بر روی آن‌ها عملیات ساده‌ی حسابی گفته‌شده را انجام دهد.

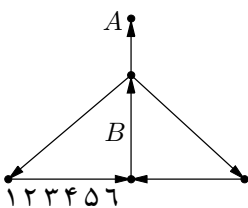
الف) ۱ ب) ۲ ج) $n-2$ د) $n-1$ ه) n

۳۶) تعدادی صابون در جدول روبه‌رو قرار دارند. در هر حرکت می‌توان به یک صابون در جهت افقی یا عمودی ضربه‌ای زد. در اثر این ضربه صابون در آن جهت شروع به حرکت می‌کند تا به مانعی (دیوارهای اطراف شکل یا صابون‌های دیگر) برسد. در این صورت در خانه قبل از آن مانع متوقف می‌شود. اگر صابون از یکی از سوراخ‌هایی نشان‌داده شده در شکل عبور کند از جدول خارج می‌شود. کم‌ترین تعداد حرکات برای خارج کردن همه صابون‌ها از جدول چه قدر است؟



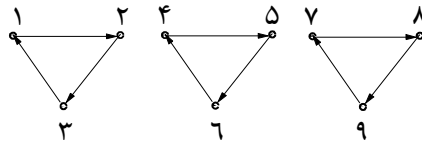
الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۱

۳۷) شکل روبه‌رو نشان‌دهنده‌ی تعدادی خیابان و تقاطع‌های بین آن‌هاست. خیابان‌ها در جهت فلش‌ها یک‌طرفه هستند. عرض هر خیابان هم به اندازه یک ماشین است؛ یعنی ماشین‌ها نمی‌توانند از یکدیگر سبقت بگیرند. هم‌چنین ماشین‌ها نمی‌توانند در محل تقاطع‌ها بایستند. در نتیجه در هر لحظه هر ماشین فقط می‌تواند در یک خیابان قرار بگیرد. می‌دانیم که یک ایستگاه عوارضی در خیابان B قرار دارد و از هر ماشین که عبور می‌کند مبلغ ۱۰ تومان دریافت می‌کند. نقطه‌ی A که در شکل دیده می‌شود یک پارکینگ است. ماشین‌های با شماره‌ی ۱ تا ۶ پشت سر هم به ترتیبی که نشان داده شده است و در جهت چپ‌به‌راست در خیابان پایین قرار دارند. می‌خواهیم این ماشین‌ها را به پارکینگ A منتقل کنیم. کم‌ترین مجموع مقدار عوارض پرداختی چه قدر است تا این ماشین‌ها به ترتیب شماره‌هایشان (اول ۱ بعد ۲، ...) وارد پارکینگ شوند؟



الف) ۱۲۰ ب) ۱۳۰ ج) ۱۴۰ د) ۱۵۰ ه) ۱۶۰

۳۸) یک کشور با ۹ شهر داریم. همان‌طور که در شکل می‌بینید، تعدادی جاده‌ی یک‌طرفه بعضی از شهرها را به هم وصل کرده است. یک شهر، مثل a ، را «خطرناک» می‌گوییم هرگاه شهر دیگری مثل b وجود داشته باشد، به‌صورتی که بتوان از a به b رفت، اما نتوان از b به a بازگشت. دولت قصد دارد ۲ جاده‌ی یک‌طرفه‌ی جدید احداث کند، به‌نحوی که در نهایت دقیقاً ۳ شهر غیرخطرناک در آن کشور باقی بماند.



دولت به چند طریق مختلف می‌تواند این جاده‌ها را احداث کند؟

- الف) ۹ ب) ۸۱ ج) ۲۷ د) ۴۸۶ ه) ۷۲۹

۳۹) تعداد زیادی از هر کدام از وزنه‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰، و ۲۰ کیلوگرمی روی میز داریم. یک جسم با وزن نامشخص در یک کفه‌ی ترازوی ساده‌ی دو کفه‌ای قرار می‌دهیم. در هر «توزین» فقط می‌توانیم یک وزنه را از روی میز در کفه‌ی دوم قرار دهیم یا یک وزنه‌را از روی کفه بر روی میز بگذاریم. توجه کنید که مجاز به گذاردن وزنه در کفه‌ای که جسم قرار دارد نیستیم.

برای مشخص کردن وزن دقیق جسم مطابق الگوریتم زیر عمل می‌کنیم:

- تعدادی وزنه‌ی ۲۰ کیلوگرمی را یک‌به‌یک در کفه‌ی دوم قرار می‌دهیم تا کفه‌ی دوم سنگین‌تر از جسم شود. سپس آخرین وزنه را بر می‌داریم.
- کار فوق را به ترتیب با وزنه‌های ۱۰، ۵، ۲ و ۱ انجام می‌دهیم تا ترازو کاملاً متوازن شود، که در آن‌صورت کار را متوقف می‌کنیم.

دقت کنید که در انجام این مراحل به محض این‌که ترازو کاملاً متوازن شود، الگوریتم پایان می‌یابد. اگر وزن جسم حداکثر ۱۰۰ کیلوگرم باشد، الگوریتم فوق حداکثر پس از چند توزین پایان می‌یابد؟

- الف) ۱۶ ب) ۱۵ ج) ۱۸ د) ۶ ه) ۲۰

۴۰) کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- الف) ب ب) د ج) الف د) ج ه) هیچ‌کدام

این سوال نمره‌ی منفی ندارد ولی شما در این سوال به شرطی نمره می‌گیرید که گزینه‌ای را انتخاب کنید که از داوطلبانی که به این سوال جواب داده‌اند کم‌ترین تعدادشان همین گزینه را انتخاب کرده باشند.