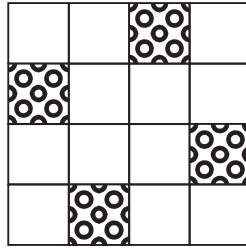


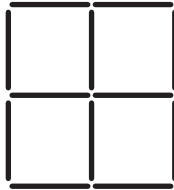
۱) شکل زیر جزیره‌ای را نشان می‌دهد که ۱۶ خانه دارد. مساحت هر خانه هم یک واحد است. ۴ تا از این خانه‌ها در شکل مشخص شده‌اند حاوی معدن طلا هستند.

یک «مزرعه»، یک مستطیل روی این جزیره است که اضلاع آن دقیقاً روی مرزهای خانه‌ها قرار دارد و مساحت آن حداقل یک واحد است. ارزش یک مزرعه برابر تعداد معادن طلای داخل آن است. برای مثال، ارزش مزرعه‌ی شامل سه ستون سمت چپ و دو سطر بالایی (به مساحت ۶) برابر ۲ و ارزش مزرعه‌ای که شامل تمام خانه‌های جدول باشد، برابر ۴ است. مجموع ارزش‌های تمام مزرعه‌های متفاوت این جزیره کدام است؟



- الف) ۱۰۴ (ب) ۲۴ (ج) ۲۴۰ (د) ۱۲۰ (ه) ۹۶

۲) یک جدول  $2 \times 2$  مانند شکل زیر داده شده است. این جدول با استفاده از ۱۲ چوب کبریت به طول واحد ساخته شده است. به چند طریق می‌توان ۲ چوب کبریت را رنگ کرد، به طوری که چوب کبریت‌های رنگ شده با هم برخورد نداشته باشند؟ دو چوب کبریت با هم برخورد دارند، اگر رأس مشترک داشته باشند.



- الف) ۴۸ (ب) ۵۰ (ج) ۵۲ (د) ۵۴ (ه) ۶۴

۳) سعید و حسام بازی زیر را انجام می‌دهند. ابتدا، سعید یک عدد طبیعی و دو رقمی  $n$  را نزد خودش انتخاب می‌کند. پس از آن و در هر مرحله، حسام یک عدد طبیعی یک رقمی مثل  $k$  به همراه یک بطری نوشابه به سعید می‌دهد و سعید در ازای آن، باقی مانده‌ی تقسیم عدد  $n$  (عدد خودش) بر عدد  $k$  را به حسام می‌گوید. فرض کنید حسام به اندازه‌ی کافی باهوش است. او در ابتدای کار حداقل چند بطری نوشابه باید همراه داشته باشد تا مطمئن شود که با آن تعداد بطری، همواره می‌تواند عدد سعید را حدس بزند.

- الف) ۲ بطری (ب) ۳ بطری (ج) ۴ بطری (د) ۵ بطری (ه) ۹ بطری

۴) تعدادی دستمال مستطیل شکل، روی یک میز سفید افتاده‌اند. از بالا که به این دستمال‌ها نگاه می‌کنیم، شکلی شبیه شکل زیر را تشکیل می‌دهند. حداقل تعداد دستمال‌ها چند تا است؟



- الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

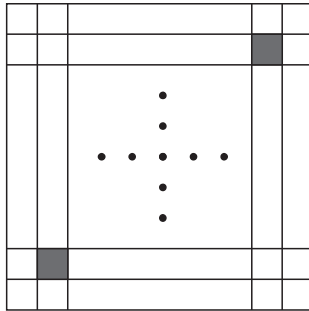
(۵) الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

- عدد  $x$  را از ورودی بگیر.
- عدد  $a$  را برابر صفر قرار بده.
- تا زمانی که عدد  $x$  بزرگ‌تر از صفر است، کارهای زیر را انجام بده:
  - باقی‌مانده‌ی تقسیم  $x$  بر ۲ را در  $k$  بریز.
  - اگر  $k$  برابر صفر بود، به مقدار  $a$  یک واحد اضافه کن.
  - $x$  را برابر خارج قسمت تقسیم خودش بر ۲ قرار بده.
- مقدار  $a$  را به عنوان خروجی الگوریتم برگردان.

برای مثال، اگر به این الگوریتم عدد ۹ را بدهیم خروجی مقدار ۲ را برمی‌گرداند. اکنون فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۳۸۸ را یکی یکی به این الگوریتم می‌دهیم و هر بار خروجی الگوریتم را یادداشت می‌کنیم. بزرگ‌ترین عددی که یادداشت می‌کنیم، چند است؟

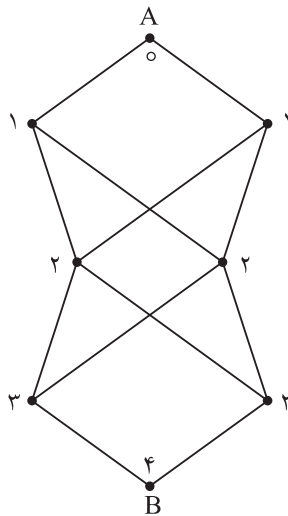
- الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۲۰ (ه) ۶۹۴

(۶) خانه‌های  $(۲, ۲)$  و  $(۹۹, ۹۹)$  یک جدول  $۱۰۰ \times ۱۰۰$  سیاه و بقیه‌ی خانه‌های آن سفید هستند. این جدول در شکل زیر نشان داده شده است. بعد از گذشت ۱ ثانیه تمام خانه‌های مجاور یک خانه‌ی سیاه، سیاه می‌شوند. دو خانه مجاور هستند، اگر و تنها اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. بعد از چند ثانیه تمام خانه‌های جدول سیاه خواهند شد؟



- الف) ۹۶ (ب) ۹۷ (ج) ۹۸ (د) ۹۹ (ه) ۱۰۰

(۷) در شکل زیر به چند طریق می‌توان از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B رفت به طوری که هر یک از اعداد ۰ تا ۴ دقیقاً یک بار در طول مسیر در نقطه‌ها مشاهده شوند؟



- الف) ۴ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۱۵ (ه) ۱۶

۸) اعداد زوج را از چپ به راست پشت سر هم می‌نویسیم. ۱۳۸۸ امین رقم این دنباله چیست؟

- الف) ۲ (ب) ۴ (ج) ۶ (د) ۸ (ه) ۹

۹) یک جایگشت مرتبه‌ی  $n$  دنباله‌ای (ترتیبی) از اعداد ۱ تا  $n$  است. برای مثال  $(۳, ۱, ۴, ۲)$  یک جایگشت مرتبه‌ی ۴ است. جدول ضرب یک جایگشت  $P = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$  یک جدول  $n \times n$  است که مقدار خانه‌ی سطر  $i$  ام و ستون  $j$  ام آن برابر  $p_i \times p_j$  می‌باشد. برای مثال، جدول ضرب جایگشت  $(۳, ۱, ۲)$  به صورت شکل زیر است.

۹	۳	۶
۳	۱	۲
۶	۲	۴

آیدا و آیدین بازی زیر را انجام می‌دهند. ابتدا آیدین از اتاق بیرون می‌رود و آیدا یک جایگشت مرتبه‌ی ۸ انتخاب می‌کند و جدول ضرب آن را می‌نویسد و بر روی هر کدام از ۶۴ خانه‌ی جدول یک سکه می‌گذارد.

آیدین به اتاق برمی‌گردد و  $k$  تا از خانه‌های جدول را انتخاب می‌کند و از آیدا می‌خواهد تا سکه‌های آن  $k$  خانه را همزمان از روی صفحه بردارد. بعد از انجام این کار، اگر آیدین بتواند جایگشت آیدا را دقیقاً تعیین کند، برنده می‌شود. کم‌ترین مقدار  $k$  که آیدین بتواند همواره برنده بشود چند است؟

- الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

۱۰) همان مسأله‌ی قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که اولاً مرتبه‌ی کار به جای ۸ برابر ۳ است. ثانیاً آیدا به جای یک جایگشت، دو جایگشت مانند  $P = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$  و  $Q = \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$  را انتخاب می‌کند و عدد سطر  $i$  ام و ستون  $j$  ام جدول برابر  $p_i \times q_j$  است. برای مثال، جدول ضرب دو جایگشت  $P = \langle ۱, ۳, ۲ \rangle$  و  $Q = \langle ۲, ۱, ۳ \rangle$  مطابق شکل زیر است:

۲	۱	۳
۶	۳	۹
۴	۲	۶

آیدین در صورتی در این مسأله برنده می‌شود که بتواند هر دو جایگشت  $P$  و  $Q$  را حدس بزند. کم‌ترین مقدار  $k$  که آیدین بتواند همواره برنده بشود چند است؟

- الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

۱۱) دو چند جمله‌ای  $1 + x - x^2 + x^3 - \dots + x^{18} - x^{19} + x^{20}$  و  $1 + x + x^2 + \dots + x^{18} + x^{19} + x^{20}$  را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

اگر مجموع ضرایب چند جمله‌ای حاصل  $A$  باشد، باقی‌مانده‌ی  $A$  بر ۵ کدام است؟

- الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

۱۲) بین شهرهای یک کشور لوله‌های آب قرار داده‌ایم. میزان انتقال آب روی هر لوله مشخص است. «قدرت» یک شهر را برابر تفاوت میزان آب خروجی از آن شهر و میزان آب ورودی به آن تعریف می‌کنیم. قدرت یک شهر ممکن است عددی منفی یا مثبت باشد، بسته به این که آن شهر تولید کننده‌ی آب باشد یا فقط مصرف کننده‌ی آب.

مثلاً اگر قدرت یک شهر ۶- و میزان آب ورودی به آن شهر ۱۰۲ لیتر باشد میزان آب خروجی (از طریق لوله‌هایی که از آن شهر به شهرهای دیگر خارج شده است) ۹۶ لیتر خواهد بود.

در یک کشور با ۵ شهر، فرض کنید باقی‌مانده‌ی قدرت چهار شهر اول تقسیم بر ۱۱ به ترتیب اعداد ۳، ۹، ۷، ۱ باشد. کدام یک از اعداد زیر می‌تواند قدرت شهر پنجم باشد؟

- الف) ۱۰۰۰ (ب) ۳۰۰۰ (ج) ۵۰۰۰ (د) ۷۰۰۰ (ه) ۹۰۰۰

۱۳) رولت روسی یک بازی مرگ بار است که طی آن هر شرکت کننده یک یا چند گلوله در هفت تیر قرار می دهد و بعد از چرخاندن تصادفی خشاب، لوله ی هفت تیر بر روی شقیقه ی خود قرار داده و ماشه را می کشد.

خشاب این هفت تیر به صورت دایره است که جای هفت گلوله دارد و بعد از کشیدن ماشه، خشاب به صورت ساعت گرد می چرخد. در یک بازی شخصی ۳ گلوله را به صورت تصادفی و با احتمال یکسان در خشاب با ظرفیت ۷ گلوله قرار می دهد و پس از چرخاندن خشاب، ۲ بار پیاپی شلیک می کند. احتمال زنده ماندنش چه قدر است؟

- الف)  $\frac{1}{7}$       ب)  $\frac{12}{49}$       ج)  $\frac{4}{7}$       د)  $\frac{17}{49}$       ه)  $\frac{2}{7}$

۱۴) فرض کنید که در مربع  $3 \times 3$  شکل زیر اعداد ۱ تا ۹ را طوری قرار داده ایم که حاصل جمع اعداد هر سطر، هر ستون و هر قطر برابر باشد. کدام یک از اعداد زیر نمی تواند در گوشه ی سمت چپ بالا قرار گیرد؟


- الف) ۲      ب) ۴      ج) ۶      د) ۸      ه) ۹

۱۵) در یک زمستان سرد، خرس قطبی ۸۸ قطعه گوشت دقیقاً به اندازه های ۱، ۲، تا ۸۸ را در غاری ذخیره کرده است. او هر روز یکی از این قطعه گوشت ها را به صورت تصادفی (و با احتمال برابر) انتخاب می کند. اگر اندازه ی گوشت عدد فردی بود، آن را کاملاً می خورد. اگر زوج بود آن را دقیقاً نصف می کند، یک نصف آن را می خورد و نصف دیگر را مجدداً در غار قرار می دهد. اگر گوشتی موجود نباشد، خرس می میرد. با این الگوریتم خرس ما چند روز می تواند زنده بماند؟

- الف) ۸۵ روز      ب) ۸۷ روز      ج) ۸۸ روز      د) ۱۷۳ روز      ه) ۱۷۵ روز

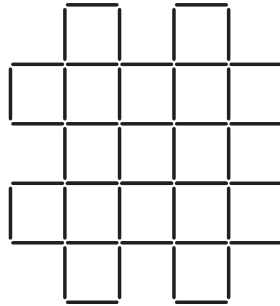
۱۶) آرایه ی  $A[1..8]$  داده شده است. بر روی آن الگوریتم زیر را اجرا می کنیم:

- ۱) در ابتدا  $i$  را برابر ۱ قرار بده و به خط ۲ برو
- ۲) اگر  $A[i] = i$  به خط ۴ برو و اگر  $A[i] \neq i$  به خط ۳ برو
- ۳)  $A[i]$  را با  $A[A[i]]$  تعویض کن و به خط ۲ برو
- ۴)  $i$  را یک واحد افزایش بده و اگر  $i$  کوچک تر یا مساوی ۸ است به خط ۲ برو. اگر  $i$  بزرگ تر از ۸ است به خط ۵ برو
- ۵) آرایه ی  $A$  را چاپ کن.

اگر  $A[1..8] = \langle 8, 5, 3, 4, 6, 1, 2, 7 \rangle$  باشد، خروجی این الگوریتم چیست؟

- الف)  $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$       ب)  $\langle 1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, 8 \rangle$       ج)  $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8 \rangle$       د)  $\langle 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$       ه)  $\langle 8, 6, 3, 4, 6, 1, 2, 7 \rangle$

۱۷) در شکل زیر که با ۴۸ عدد چوب کبریت ساخته شده است، حداقل چند چوب کبریت باید برداشته شود تا هیچ مربعی دیده نشود؟



- الف) ۶ (ب) ۱۰ (ج) ۱۲ (د) ۱۳ (ه) ۱۶

۱۸) بر روی یک عدد ۸ بیتی  $a_8a_7 \dots a_2a_1$  دو عمل زیر را می توانیم انجام دهیم:

• شیف: تغییر آن به  $a_1a_8a_7 \dots a_3a_2$

• تبدیل: تغییر آن به  $a_8a_7 \dots a_2\bar{a}_1$  که بیت  $x$  را اگر ۰ باشد به ۱ و اگر ۱ باشد به ۰ تغییر می دهد.

با چند تا از این دو عمل می توانیم  $10000010$  را به  $11110000$  تبدیل کنیم؟

- الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸ (ه) ۹

۱۹) ۶ عدد متفاوت داده شده است. با چند تا مقایسه بین این اعداد می توان کوچک ترین و بزرگ ترین این اعداد را یافت؟ بهترین جواب را مشخص کنید.

- الف) ۷ (ب) ۸ (ج) ۹ (د) ۱۰ (ه) ۱۱

۲۰) فرض کنید آرایه ای به طول ۱۰۰۰ از بیت های ۰ و ۱ داریم. می گوییم این آرایه «۰ - غالب» است اگر دست کم ۹۰٪ اعداد آن ۰ باشد (و در نتیجه حداکثر ۱۰٪ آن ۱ باشد). همچنین آرایه ای «۱ - غالب» است اگر دست کم ۹۰٪ اعداد آن ۱ باشد (و در نتیجه حداکثر ۱۰٪ آن می دانیم که آرایه یا ۰ - غالب است یا ۱ - غالب، ولی نمی دانیم کدام یک. چند تا از درایه های این آرایه را باید بررسی کنیم تا به طور قطع بتوانیم بگوییم که آرایه ۰ - غالب است یا ۱ - غالب؟

- الف) ۱۹۱ (ب) ۲۰۱ (ج) ۲۱۰ (د) ۵۰۱ (ه) ۹۰۱

۲۱) افراد با شماره های ۱ تا ۶ به ترتیب دور میز دایره ای شکل و در جهت ساعت گرد نشسته اند و هر یک ورقه ای دارند که بر روی آن یک عدد نوشته شده است (عدد فرد شماره  $i$  را  $A[i]$  می نامیم). الگوریتم زیر را  $1388$  مرتبه تکرار می کنیم:

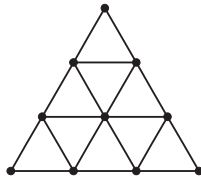
۱) هر فرد با شماره  $i$  فرد ورقه اش را با نفر کناری اش (در جهت ساعت گرد) مقایسه می کند. خود عدد کوچک تر و نفر کناری اش عدد بزرگ تر را برمی دارد.

۲) هر فرد با شماره  $i$  زوج ورقه اش را با نفر کناری اش (در جهت ساعت گرد) مقایسه می کند. خود عدد کوچک تر و نفر کناری اش عدد بزرگ تر را برمی دارد.

اگر  $A[1..6] = \langle 2, 4, 5, 6, 8, 9 \rangle$  باشد، بعد از اجرای ۱ مرحله  $A[1..6] = \langle 9, 5, 4, 8, 6, 2 \rangle$  خواهد بود. بعد از اجرای  $1388$  مرحله ورقه ای که عدد ۲ روی آن نوشته شده است در دست کدام فرد خواهد بود؟

- الف) شماره ۱ (ب) شماره ۲ (ج) شماره ۴ (د) شماره ۵ (ه) شماره ۶

۲۲) حداکثر چند تا از نقطه‌های توپر در شکل مقابل را می‌توان با سفید رنگ کرد تا نقطه‌های سفید رئوس، یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل ندهند.



الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

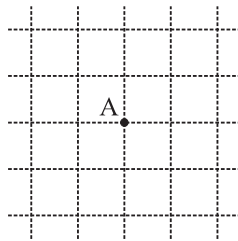
۲۳) بر روی یک جایگشت  $\langle a_1 a_2 \dots a_7 a_8 \rangle$  می‌توانیم دو عمل زیر را انجام دهیم:

- عمل اول: تغییر آن به  $\langle a_8 a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 \rangle$
- عمل دوم: تغییر آن به  $\langle a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \rangle$

فرض کنید جایگشت اولیه  $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$  است. عدد  $i$  را طلایی گوییم اگر با استفاده از دو عمل بالا بتوان جایگشتی تولید کرد که  $a_i = 2$  باشد. تعداد اعداد طلایی چند تا است؟

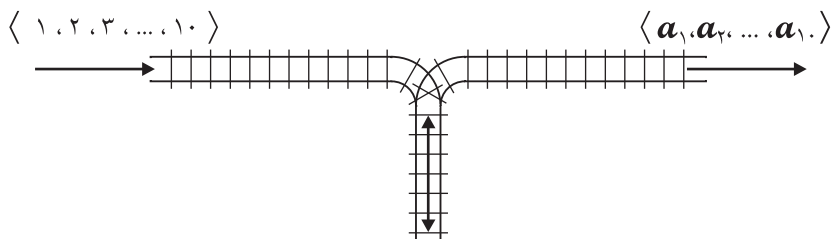
الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۸

۲۴) همان طور که در شکل نشان داده شده است فردی در نقطه‌ی  $A$  قرار دارد. او در حرکت به احتمال  $5/10$  یک واحد به سمت راست و به احتمال  $5/10$  یک واحد به سمت چپ می‌رود. احتمال اینکه بعد از ۷ حرکت فاصله‌ی او از نقطه‌ی  $A$  بیش‌تر از ۳ باشد چه قدر است؟



الف)  $1/16$  (ب)  $14/128$  (ج)  $58/128$  (د)  $1/8$  (ه)  $56/256$

۲۵) یک ردیف از قطار با شماره‌های ۱ تا ۱۰ پشت سر هم مطابق شکل زیر قرار دارند. این ردیف را با دنباله‌ی  $\langle 1, 2, 3, \dots, 10 \rangle$  نمایش می‌دهیم. قطار ۱ آخرین قطار است. بین ریل ورودی و ریل خروجی ریلی به نام «پارکینگ» دقیقاً مطابق شکل زیر قرار گرفته است. هر قطار برای آنکه در ریل خروجی ظاهر شود باید ابتدا به پارکینگ وارد شود. همیشه هم آخرین قطار موجود در پارکینگ دنده عقب به خروجی منتقل می‌شود. با این ترتیب در خروجی یک دنباله از قطارها (به ترتیب از راست به چپ) ظاهر خواهد شد که با  $\langle a_1, a_2, \dots, a_{10} \rangle$  نشان می‌دهیم و به آن دنباله‌ی «قابل تولید» می‌گوییم. دقت کنید که  $a_1$  آخرین قطاری است که خارج می‌شود. چند تا از دنباله‌های زیر قابل تولید هستند؟



- $\langle 10, 9, 8, 7, 4, 6, 3, 2, 1, 5 \rangle$
- $\langle 9, 9, 1, 6, 7, 5, 1, 3, 2, 10 \rangle$
- $\langle 8, 6, 7, 1, 10, 5, 4, 3, 9, 2 \rangle$
- $\langle 10, 9, 8, 1, 7, 6, 5, 3, 2, 4 \rangle$

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴