

مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس اول)

مسئله‌ی ۱: دنباله‌ی آینه‌ای ۱۰ امتیاز

دنباله‌ی $\mathcal{F}(i, j)$ را به این صورت می‌سازیم:

$$\begin{aligned}F_0 &= i \\F_1 &= j \\F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}\end{aligned}$$

روشن است که $\mathcal{F}(0, 1)$ همان دنباله‌ی فیبوناچی است. اگر این رابطه را برای مقادیر منفی n هم باز کنیم اعداد زیر به دست می‌آیند:

$$\dots, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

اگر علامت‌های منفی را در نظر نگیریم دنباله «آینه‌ای» می‌شود، یعنی اعداد نسبت به عدد F_0 قرینه هستند. در این صورت می‌گوییم $\mathcal{F}(0, 1)$ آینه‌ای است.

به ازای کدام مقادیر دیگر i و j دنباله‌ی $\mathcal{F}(i, j)$ آینه‌ای خواهد بود؟ اثبات کنید.

مسئله‌ی ۲: جوش کاری ۲۰ امتیاز

می‌خواهیم n قطعه آهن f_1, f_2, \dots, f_n به ترتیب با طول‌های l_1, l_2, \dots, l_n را به همین ترتیب (از چپ به راست) به هم جوش دهیم تا یک قطعه آهن بزرگ از آن‌ها ایجاد شود. برای این کار این قطعات را به همین ترتیب پشت سرهم در یک ردیف می‌چینیم و هر بار دو تا از قطعه‌های کنار هم را برداشته، به هم جوش می‌دهیم و در جای قبلی‌شان قرار می‌دهیم (با این کار یک عدد از تعداد قطعه آهن‌ها کم می‌شود). این کار را اگر $n - 1$ بار تکرار کنیم، کار به پایان رسیده است.

اما می‌دانیم که هزینه‌ی جوش دادن دو قطعه آهن کنار هم به طول‌های a و b برابر $a + b$ است. می‌خواهیم قطعه آهن‌ها را به ترتیبی به هم جوش دهیم تا مجموع کل هزینه‌ی این کار کمینه شود.

برای این کار یک زیرمسئله‌ی P_{ij} تعریف می‌کنیم که آن جوش دادن f_i, f_{i+1}, \dots, f_j (به هم با همین ترتیب است. هزینه‌ی کمینه‌ی این کار را C_{ij} می‌نامیم).

الف. یک فرمول بازگشتی برای C_{ij} و برحسب C_{rk} بنویسید به طوری که $r < k$ و $k - r < j - i$. بدیهی است که $C_{ii} = 0$.

ب. نشان دهید که C_{1n} برای مسئله‌ی اصلی چه‌گونه محاسبه می‌شود.

ج. برای $n = 5$ و ورودی $l_1 = 6, l_2 = 2, l_3 = 4, l_4 = 3, l_5 = 5$ بند «ب» را دنبال کنید و مقدار هزینه‌ی کل و ترتیب جوش دادن را به دست آورید.

مسئله‌ی ۳: ناریا ۲۰ امتیاز

کشوری با n شهر را «صرفه‌جو» گوییم اگر دقیقاً $n-1$ جاده بین شهرهای آن به گونه‌ای کشیده شده باشد که بتوان با شروع از هر یک از شهرهای آن با استفاده از جاده‌ها به هر شهر دیگری از آن رسید. توجه کنید که هر جاده بین دو شهر کشیده می‌شود. می‌توان ثابت کرد که اگر هر یک از جاده‌های یک کشور صرفه‌جو از بین برود، کشور به دو زیر کشور صرفه‌جو، تقسیم می‌شود. مثلاً اگر یک کشور صرفه‌جو با ۲ شهر داشته باشیم و تنها جاده‌ی موجود در آن را حذف کنیم دو کشور صرفه‌جو که هر کدام ۱ شهر دارند به دست می‌آید. کشور ناریا یک کشور صرفه‌جو با n شهر است. در ضمن می‌دانیم که به هر کدام از شهرهای این کشور حداکثر ۳ جاده متصل شده است. ثابت کنید در این کشور جاده‌ای وجود دارد که با حذف آن کشوری که به دست می‌آیند هر کدام حداقل $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ و حداکثر $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ شهر داشته باشند. ($\lfloor r \rfloor$ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی r و $\lceil r \rceil$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی r است).

مسئله‌ی ۴: جای گشت نقره‌ای ۲۵ امتیاز

یک جای گشت، ترتیبی از اعداد ۱ تا n است که هر عدد دقیقاً یک‌بار در آن ظاهر شده است. مثلاً «۳ ۲ ۵ ۱ ۴» یک جای گشت از اعداد ۱ تا ۵ را نشان می‌دهد. فرض کنید عدد π_n آخرین عدد جای گشت π باشد. هر عمل وارون تعداد π_n عنصر آخر π را در دنباله معکوس می‌کند (به ترتیب عکس قرار می‌دهد) تا جای گشت $rev(\pi)$ به دست آید. مثلاً اگر عمل وارون را روی جای گشت بالا اعمال کنیم «۲ ۱ ۵ ۴ ۳» به دست می‌آید. گوییم π یک جای گشت نقره‌ای است اگر $rev(\pi) = \pi$ ثابت کنید با انجام متناهی بار عمل وارون روی هر جای گشت π سرانجام یک جای گشت نقره‌ای به دست می‌آید.

مسئله‌ی ۵: کیسه‌ها ۲۵ امتیاز

$2n$ مهره داریم که روی هر یک عددی نوشته شده است. می‌دانیم هر یک از اعداد ۱ تا n روی دقیقاً دو مهره نوشته شده است. مهره‌ها در n جعبه طوری گذاشته شده‌اند که در هر جعبه دو مهره (با اعداد نه لزوماً یک‌سان) قرار دارند و مهره‌های درون جعبه‌ها دیده می‌شوند. یک مهره از یکی از جعبه‌ها اخیراً گم شده است.

می‌خواهیم از هر جعبه تنها یک مهره برداریم به طوری که از همه‌ی اعداد ۱ تا n مهره‌ای برداشته باشیم.

آیا این کار همواره ممکن است؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، این موضوع را اثبات کرده و در صورت منفی بودن، یک مثال نقض بزنید.