

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مدت آزمون: ۴/۵ ساعت

سوال ۵ ۱۰ امتیاز

در یک مهمانی n نفر حضور دارند. به ازای یک عدد ثابت k ، $(1 \leq k \leq n - 1)$ ، هر یک از این افراد با k نفر از بقیه‌ی مهمانان دست می‌دهد. می‌دانیم که لااقل $1 + \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ نفر وجود دارند که دوبه‌دو با هم دست داده‌اند. ثابت کنید که در این مهمانی هر دو نفر با هم دست داده‌اند. (منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.)

سوال ۶ ۱۵ امتیاز

یک سفینه‌ی فضایی می‌خواهد پیامهایی را به زمین ارسال کند. دستگاه فرستنده‌ی این سفینه قادر است در هر مرحله یک «کلمه» به زمین بفرستد. هر کلمه یک دنباله به طول n از صفر و یک است. بنابراین با استفاده از این فرستنده می‌توان هر پیغام را به صورت دنباله‌ای از کلمه‌ها به زمین ارسال کرد. به دلیل طولانی بودن مسیری که پیام باید طی کند تا به زمین برسد، در بین راه ممکن است در هر کلمه حداکثر یکی از صفرها تبدیل به یک و یا حداکثر یکی از یک‌ها تبدیل به صفر شود. هدف ما در این مسأله این است که برای فرستادن پیام‌ها تنها از بعضی کلمات خاص استفاده کنیم، به طوری که پس از رسیدن پیام به زمین خطاها قابل تشخیص و رفع کردن باشند. برای مثال اگر $n = 6$ باشد، می‌توانیم از ۴ کلمه‌ی ۰۰۰۰۰۰، ۱۱۱۰۰۰، ۰۰۰۱۱۱، و ۱۱۱۱۱۱

استفاده کنیم. در این صورت اگر برای مثال کلمه‌ی 110111 به زمین برسد، می‌توانیم تشخیص دهیم که کلمه‌ی درست 111111، و نه کلمه‌ای دیگر از کلمات فوق، بوده است که در اثر خطا به 110111 تبدیل شده است.

(۱) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای این که عمل تشخیص و رفع کردن خطا ممکن باشد این است که هر دو کلمه‌ای که از آنها استفاده می‌کنیم لااقل در سه محل با هم اختلاف داشته باشند.

(۲) ثابت کنید که اگر $n = 20$ باشد، برای این که خطاها قابل تشخیص و رفع باشند، نمی‌توانیم بیشتر از ۵۰۰۰۰ کلمه در دستگاه داشته باشیم.

سوال ۷ ۱۵ امتیاز

یک اداره از n بخش تشکیل شده است که هر بخش دارای یک نفر با عنوان مدیر بخش است. مدیر هر یک از این بخش‌ها n نفر کارمند را تحت نظر دارد. هر یک از این افراد تنها در یکی از این بخش‌ها کار می‌کنند. (بنابراین هر یک از کارمندان تنها تحت نظر یک مدیر است.)

می‌خواهیم برای هر یک از افرادی که در این اداره کار می‌کنند (یعنی مدیران بخش‌ها و کارمندان) یک دفتر کار اختصاص دهیم به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

- هر یک از این افراد یک دفتر داشته باشد. البته هر یک از دفترها می‌تواند هر تعداد از این افراد را در خود جای دهد.
- هیچ دو مدیری نباید با هم در یک دفتر قرار بگیرند.
- دفتر مدیر هیچ یک از بخش‌ها نباید با دفتر هیچ یک از کارمندان همان بخش یکی باشد.

• هر یک از مدیران باید با یک خط تلفن اختصاصی با هر یک از کارمندان زیر نظرش در ارتباط باشد. منظور از یک خط تلفن اختصاصی بین مدیر a و کارمند b ، خط تلفنی است که بین دفتر کار این دو کشیده شده است و از طریق آن تنها این دو نفر می‌توانند با هم صحبت کنند و هیچ کدام از سایر کارمندان و مدیران نباید از این خط استفاده کنند.

• بین هر دو دفتر کار حداکثر یک خط تلفن می‌توان کشید.

ثابت کنید که حداقل تعداد دفترهای لازم برای جا دادن این افراد به طوری که شرایط فوق برقرار شوند برابر است با $1 + \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. (منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.)

سوال ۸ ۱۵ امتیاز

در جمعی n نفر حضور دارند. بعضی از این افراد همدیگر را می‌شناسند. فرض کنید که آشنایی یک رابطه‌ی دو طرفه است؛ یعنی اگر a ، b را بشناسد، b نیز a را می‌شناسد. فرض کنید که هر نفر در این جمع حداکثر با d نفر دیگر آشناست.

اگر $d = k + l + 1$ باشد، می‌خواهیم این افراد را به دو گروه A و B تقسیم کنیم به طوری که هر یک از اعضای گروه A حداکثر k نفر از دیگر اعضای این گروه را بشناسد و هر یک از اعضای گروه B هم با حداکثر l نفر از دیگر اعضای این گروه آشنا باشد.

برای این منظور الگوریتم زیر پیشنهاد شده است:

ابتدا یک گروه‌بندی دلخواه (A, B) را در نظر می‌گیریم. سپس در هر مرحله این کار را انجام می‌دهیم: اگر گروه‌بندی (A, B) دارای شرایط مسأله بود، کار تمام شده است. در غیر این صورت یا یک نفر در A وجود دارد که با بیش از k نفر از اعضای گروهش آشنا باشد و یا یک نفر در گروه B وجود دارد که با بیش از l نفر از اعضای گروهش آشنا باشد. در هر یک از این دو حالت فرد مزبور را به گروه دیگر منتقل می‌کنیم.

ثابت کنید که این الگوریتم همواره به جواب می‌رسد.