

## مرحله ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی دانش آموزان ایران

بهمن ماه ۱۳۷۵

(۱) اعداد زوج متوالی  $۲, ۴, ۶, ۸, \dots$  را آن قدر ضرب می کنیم تا حاصل بر ۱۳۷۵ بخش پذیر شود. بزرگ ترین عدد زوج به کار رفته در کدام یک از روابط زیر صدق می کند؟

الف) بین ۱ تا ۱۱      ب) بین ۱۱ تا ۲۱      ج) بین ۲۱ تا ۳۱

د) بین ۳۱ تا ۴۱      ه) چنین کاری امکان پذیر نیست.

(۲) اگر  $۹x+۵y$  بر ۱۱ بخش پذیر باشد، برای این که لزوماً  $۱۰x+ky$  نیز بر ۱۱ بخش پذیر شود،  $k$  را برابر کدام یک از مقادیر زیر انتخاب کنیم؟

الف) ۲      ب) ۴      ج) ۶      د) ۸      ه) ۱۰

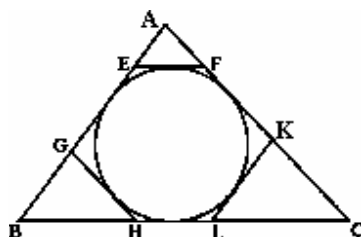
(۳) مربع  $ABCD$  در صفحه مفروض است. سه خط موازی  $d_1, d_2, d_3$  را به ترتیب از سه رأس  $A, B, C$  رسم می کنیم به طوری که فاصله ی  $d_1$  با  $d_2$  برابر ۵ و فاصله ی  $d_2$  با  $d_3$  برابر ۷ باشد. مطلوب است مساحت مربع.

الف) ۷۰      ب)  $\sqrt{۲۵}$       ج) ۳۵      د)  $\sqrt{۷۴}$       ه) ۷۴

(۴) تعداد سه تایی های مرتب  $(x, y, z)$  از اعداد صحیح که در معادلات  $x+y-z=۱۰۰$  و  $x+y^2-z=۱۲۴$  صدق می کنند، عبارت است از:

الف) ۰      ب) ۱      ج) ۲      د) ۳      ه) ۴

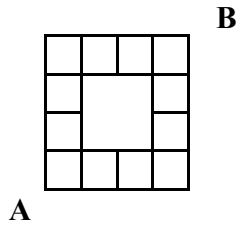
(۵) مثلث  $ABC$  و دایره ی محاطی آن به شعاع  $r$  مفروض است. سه مماس  $EF, GH, KL$  را به ترتیب موازی  $BC, AC, AB$  رسم کرده ایم. اگر  $r_a, r_b, r_c$  به ترتیب شعاع های دایره های محاطی مثلث های  $AEF, BGF, CKL$  باشند، آن گاه کدام یک از روابط زیر همواره صحیح است؟



الف)  $r - r_a < r_b + r_c$       ب)  $r - r_a > r_b + r_c$       ج)  $r - r_a = r_b + r_c$

د)  $r - r_a = r_b - r_c$       ه) هیچ کدام از این روابط همواره برقرار نیست.

۶) در شکل مقابل به چند طریق می توانیم روی خطوط رسم شده از A به B برویم به طوری که کوتاه ترین مسیر ممکن را پیموده باشیم؟



الف) ۱۸      ب) ۲۴      ج) ۲۶      د) ۲۸      ه) ۳۲

۷) عدد طبیعی b را که از وارون کردن ارقام عدد طبیعی a بدست می آید، مقلوب a می نامیم (مثلا مقلوب ۱۳۷۵ عدد ۵۷۳۱ است). مطلوب است تعداد اعداد بین ۱ تا ۹۹۹۹۹، که مقلوبشان با خودشان برابر است.

الف) ۱۰۹۸      ب) ۱۲۲۰      ج) ۹۷۶      د) ۱۵۴۲      ه) ۱۰۰۸

۸) فرض کنید a، b و c سه عدد حقیقی باشند که  $a \neq 0$ . اگر  $a$  و  $4a + 3b + 2c$  دارای یک علامت باشند، کدام یک از نتیجه گیری های زیر برای معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  درست است؟

الف) هر دو ریشه در صورت وجود نمی توانند در بازه ی (۱،۴) قرار گیرند.

ب) هر دو ریشه در صورت وجود نمی توانند در بازه ی (۱،۲) قرار گیرند.

ج) معادله دارای دو ریشه ی حقیقی است.

د) دو ریشه ی معادله در صورت وجود نمی تواند

ه) هر دو ریشه ی معادله در صورت وجود دارای علامت های یکسانی هستند.

۹) دنباله های  $a_n = \sqrt{12n + n^2}$  و  $b_n = n + 3$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) داده شده اند. فرض کنید که  $r$  کوچکترین عدد صحیحی باشد که  $a_r < b_r$  و  $s$  نیز بزرگ ترین عدد صحیحی باشد که  $a_s > b_s + 1$ . در این صورت  $r + s$  برابر است با:

- الف) ۳۰      ب) ۳۱      ج) ۳۲      د) ۳۳      ه) ۳۸

۱۰) مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ ) مفروض است. نیمساز زاویه  $B$  ضلع  $AC$  را در  $D$  قطع می کند و داریم  $BC = BD + AD$ . اندازه ی زاویه ی  $A$  برابر است با:

- الف)  $100^\circ$       ب)  $108^\circ$       ج)  $110^\circ$       د)  $115^\circ$       ه)  $120^\circ$

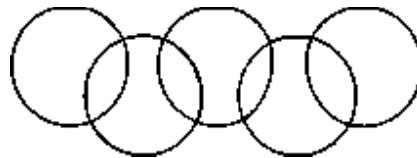
۱۱) در مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ ) میانه ی  $BM$  عمود بر نیمساز  $CD$  است. در این صورت  $\sin C$  برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟

- الف)  $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$       ب)  $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$       ج)  $\frac{\sqrt{5}}{4}$       د)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$       ه)  $\frac{1}{4}$

۱۲) فرض کنید  $a, b$  و  $c$  سه عدد صحیح باشند به طوری که  $a < 2b$  و باقی مانده ی تقسیم  $a$  بر  $b$  برابر  $2r$ ، باقی مانده ی تقسیم  $a$  بر  $c$  برابر  $r$  و باقی مانده ی تقسیم  $b$  بر  $c$  نیز برابر  $r$  است. در این صورت کوچکترین عدد از میان اعداد زیر که بر  $c$  بخش پذیر باشد کدام است؟

- الف)  $a+b$       ب)  $\frac{a+b}{2}$       ج)  $\frac{a+b}{3}$       د)  $2(a+b)$       ه)  $3(a+b)$

۱۳) ۵ دایره مطابق شکل، ۹ ناحیه (متناهی) در صفحه به وجود آورده اند. اعداد ۱ تا ۹ را به این نواحی طوری نسبت می دهیم که مجموع اعداد هر دایره با مجموع اعداد دایره های دیگر مساوی باشد. بیش ترین مقداری که این مقدار مساوی می تواند داشته باشد، عبارت است از:



- الف) ۱۲      ب) ۱۳      ج) ۱۴      د) ۱۵      ه) ۱۶

۱۴) اگر  $S = \frac{(2^F - 1)(3^F - 1)(4^F - 1) \dots (100^F - 1)}{(2^F + 1)(3^F + 1)(4^F + 1) \dots (100^F + 1)}$  ، کدام یک از مقادیر زیر به S نزدیک تر است؟

الف)  $\frac{1}{6}$     ب)  $\frac{1}{67}$     ج)  $\frac{1}{667}$     د)  $\frac{1}{6667}$     ه)  $\frac{1}{66667}$

۱۵) به ازای کدام مقدار n، معادله  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$  در مجموعه ی اعداد طبیعی دارای جواب منحصر به فردی است؟

الف) ۱۰۲۴    ب) ۲۱۱۹    ج) ۲۲۱۹    د) ۲۶۵۱    ه) هیچ کدام

۱۶) یک صفحه ی شطرنجی  $25 \times 25$  را در نظر گرفته اعداد ۱ تا  $25^2$  را به ترتیب زیر در خانه های آن قرار می دهیم. اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۲۵ را از چپ به راست در سطر اول، ۲۶، ۲۷، ... و ۵۰ را از چپ به راست در سطر دوم، و بقیه را به همین ترتیب در سطر های بعدی مربع قرار می دهیم. حال اگر ۲۵ خانه را چنان انتخاب کنیم که هیچ دو تایی در یک سطر یا یک ستون نباشند در آن صورت مجموع اعداد این خانه ها چه مقدار هایی می تواند داشته باشد؟

الف) فقط می تواند برابر  $\binom{25}{2}$  باشد.

ب) هر مقدار بین  $\binom{25}{2}$  و  $\binom{25}{2}$  می تواند باشد.

ج) فقط می تواند  $\frac{1}{2}(25^2 + 25)$  باشد.

د) هر مقدار بین  $\binom{25}{2}$  و  $\frac{1}{2}(25^2 + 25)$  می تواند باشد.

ه) هر مقدار بین  $25^2$  و  $\frac{1}{2}(25^2 + 25)$  می تواند باشد.

۱۷) چندجمله ای  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ ، که  $a_i$  ها اعداد صحیح هستند، مفروض است. اگر داشته باشیم  $P(1) = P(2) = 0$ ، در آن صورت دقیق ترین حکمی که در مورد ضرایب P می توان بیان کرد، کدام است؟

الف) ضریب جمله ی ثابت (یعنی  $a$ ) کوچک تر یا مساوی ۲ است.

ب) اختلاف بین تعداد ضرایب مثبت و ضرایب منفی حداکثر یک واحد است.

ج) مجموع ضرایب توان های فرد قرینه ی مجموع ضرایب توان های زوج است.

د) حداقل یک ضریب کوچک تر یا مساوی ۲- وجود دارد.

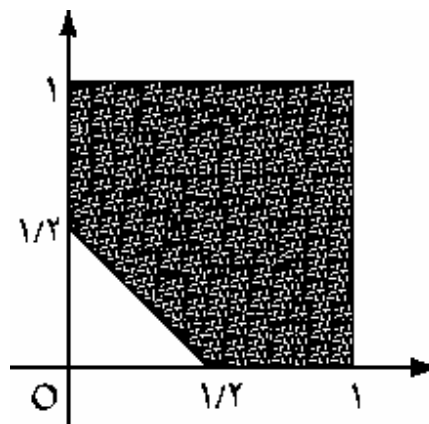
ه) هیچ کدام از حکم های بالا در مورد تمامی  $P(x)$  ها صدق نمی کنند.

۱۸) مربع  $S = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  را در نظر بگیرید و به ازای هر  $t \in [0,1]$ ،  $C_t$  را مجموعه ی نقاطی

از  $S$  در نظر بگیرید که بالای خط واصل بین نقاط  $(0,1-t)$  و  $(t,0)$  هستند (۲) در شکل نشان داده شده است).

اگر  $A$  اشتراک تمام  $C_t$  ها،  $0 \leq t \leq 1$ ، باشد یعنی  $A = \{x | x \in C_t, \forall t \in [0,1]\}$  در آن صورت  $A$  برابر

کدام یک از مجموعه های زیر است؟



الف)  $S \cap \{(x,y) | x+y \geq 1\}$

ب)  $S \cap \{(x,y) | x + \sqrt{y} \geq 1\}$

ج)  $S \cap \{(x,y) | \sqrt{x} + y \geq 1\}$

د)  $S \cap \{(x,y) | \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1\}$

$$S \cap \{(x, y) \mid \sqrt{x+y} \geq 1\} \quad (ه)$$

۱۹) فرض کنید که  $P_1, P_2, \dots$  و  $P_{10}$  ده عدد طبیعی زوج و متمایز باشند. برای هر دنباله ی دل خواه  $a_1, a_2, \dots$  و  $a_{1375}$  که  $a_i$  ها از اعداد  $P_1$  تا  $P_{10}$  باشند کدام یک از احکام زیر درست است؟

الف) تعدادی متناهی از  $a_i$  های متوالی وجود دارند که حاصل ضرب آن ها یک مربع کامل است.

ب) تعدادی متناهی از  $a_i$  های متوالی وجود دارند که حاصل ضرب آن ها یک مکعب کامل است.

ج) تعدادی متناهی از  $a_i$  های متوالی وجود دارند که حاصل ضرب آن ها دو برابر یک مربع کامل است.

د) تعدادی متناهی از  $a_i$  های متوالی وجود دارند که حاصل ضرب آن ها دو برابر یک مکعب کامل است.

ه) الف و ب هر دو درست است.

۲۰) فرض کنید  $1375$  بزرگ ترین عدد صحیح است که  $2^{1375}$ ، عدد طبیعی  $n$  را می شمارد. در آن صورت بزرگ ترین مقدار  $k$  را به طوری که  $2^k$  عدد  $A = 1 + 9 + 9^2 + \dots + 9^{n-1}$  را بشمارد برابر است با:

الف) ۱۳۷۴      ب) ۱۳۷۵      ج) ۱۳۷۶      د) ۱۳۷۷      ه) ۱۳۷۸

۲۱) فرض کنید  $f$  و  $g$  چندجمله ای با ضرایب حقیقی و با درجه ی بزرگ تر یا مساوی ۲ باشد. اگر داشته باشیم:

$$f\left(x^2\right) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)g\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

در این صورت از بین نتیجه گیری های زیر، کدام یک دقیق تر است؟

الف) به ازای هر  $n \geq 2$ ، چنین چندجمله ای هایی وجود دارند به طوری که  $f$  درجه ی  $n$  است.

ب) چنین چندجمله ای هایی وجود ندارند.

ج)  $f(x)$  ریشه ای در بازه ی  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  دارد.

د)  $g(x)$  ریشه ای در بازه  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  دارد.

ه)  $g(x)$  برای هر  $x$  بزرگ تر از صفر است.

۲۲) در مثلث مفروض  $ABC$ ،  $D$  را پای نیمساز رأس  $A$ ، و  $E$  را قرینه  $D$  نسبت به نقطه  $F$  وسط ضلع  $BC$  می گیریم. حال اگر  $F$  را روی  $BC$  به قسمی انتخاب کنیم که  $\angle BAF = \angle EAC$  در آن صورت  $\frac{BF}{FC}$  برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟

الف)  $\frac{c}{b}$       ب)  $\frac{c^2}{b^2}$       ج)  $\frac{c^2}{b^2}$       د)  $\frac{c}{c+b}$       ه)  $\frac{c^2}{(b+c)^2}$

۲۳) در مثلث  $ABC$  نقطه  $H$  محل برخورد ارتفاع های مثلث است. اگر  $AH=BC$ ، آن گاه زاویه  $A$  چه مقادیری می تواند داشته باشد؟

الف)  $30^\circ$  و  $45^\circ$       ب)  $60^\circ$  و  $75^\circ$       ج)  $60^\circ$   
د)  $45^\circ$       ه)  $45^\circ$  و  $60^\circ$

۲۴) اگر  $S = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ ، آن گاه بزرگ ترین زیر مجموعه  $S$  با این خاصیت که هیچ عضو آن دو برابر دیگری نباشد چند عضو دارد؟

الف) ۵۵      ب) ۶۲      ج) ۶۶      د) ۷۱      ه) ۷۷

۲۵) در مورد تعداد دنباله های  $n_1, n_2, n_3, \dots$  از اعداد طبیعی با این خاصیت که برای هر  $k$  داشته باشیم

$$n_{k+1} > n_k$$

چه می توان گفت؟

الف) بی نهایت دنباله با این خاصیت وجود دارد.

ب) تعداد زوجی از این دنباله ها وجود دارد.

ج) دقیقا ۵ دنباله با این خاصیت وجود دارد.

د) دقیقا ۳ دنباله با این خاصیت وجود دارد.

ه) دقیقا یک دنباله با این خاصیت وجود دارد.

۲۶) برای عدد طبیعی  $n$ ، بسط  $n$  در مبنای ۲ را در نظر گرفته و  $f(n)$  را برابر تعداد رقم های صفر در آن در نظر می گیریم (به عنوان مثال  $f(۴)=۲$  و  $f(۶)=۱$ ). اگر فرض کنیم که  $S=۲^{f(۱)}+۲^{f(۲)}+...+۲^{f(۲۵۵)}$  آن گاه مقدار  $S$  برابر خواهد بود با:

- الف) ۳۲۸۰ (ب) ۱۰۹۰ (ج) ۱۰۸۶ (د) ۳۲۷۶ (ه) ۶۵۶۰

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

۲۷) در حاصل ضرب ضریب جمله ی  $x_1^4 x_2^4 \dots x_9^4$  برابر است با:

- الف) صفر (ب)  $\binom{9}{4}$  (ج)  $-\binom{9}{4}$  (د)  $9 \times \binom{9}{2} \times \binom{9}{2}$  (ه)  $-9 \times \binom{9}{2} \binom{9}{2}$

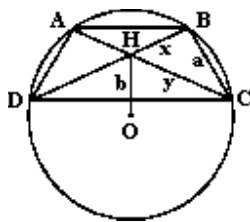
۲۸) تعداد زوجی بردار واحد از یک نقطه از صفحه رسم شده اند به طوری که یک در میان قرمز و آبی هستند. فرض کنید  $\vec{R}$  مجموع بردار های قرمز و  $\vec{B}$  مجموع بردار های آبی باشد. در این صورت دقیق ترین حکمی که می توان گفت چیست؟

- الف)  $|\vec{R} - \vec{B}| \leq 2$  (ب)  $|\vec{R} - \vec{B}| \leq 1 + \sqrt{2}$  (ج)  $|\vec{R} - \vec{B}| \leq 1 + \sqrt{2}$  (د)  $|\vec{R} - \vec{B}| \leq \frac{2\pi}{3}$  (ه)  $|\vec{R} - \vec{B}| \leq \pi - 1$

۲۹) ۲۵ نقطه به طور دل خواه روی دایره ای قرار گرفته اند. مطلوب است حداقل تعداد کمان های کوچکتر یا مساوی با  $۱۲۰^0$  که توسط این نقاط درست می شود.

- الف) ۱۰۰ (ب) ۱۲۰ (ج) ۱۳۲ (د) ۱۴۴ (ه) ۱۴۹

۳۰) در شکل زیر ABCD دوزنقه ی متساوی الساقین محاط در دایره ی واحد است. فرض کنید  $y > x$ . در این صورت  $y-x$  برابر است با:



- الف)  $(ab)^2$  (ب)  $a\sqrt{b}$  (ج)  $ab$  (د)  $b\sqrt{a}$  (ه)  $\sqrt{ab}$