

مرحله ی اول بیست و سومین المپیاد ریاضی ایران

۹ بهمن ۱۳۸۳

(۱) پس از بسط دادن $(1 + 2x + 3x^2 + \dots + 9x^8 + 10x^9)^2$ ، چند تا از ضرایب فرد است؟

الف) ۱ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ ه) ۱۰

(۲) در برکه ای ۷ قطعه سنگ وجود دارد که از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۷ شماره گذاری شده اند. قورباغه ای روی سنگ شماره ۱ یک نشسته است. فاصله ی سنگ ها به گونه ای است که اگر قورباغه روی سنگ i ام باشد می تواند حداکثر تا i سنگ جلو بپرد. به چند طریق ممکن است قورباغه، بدون برگشت به سمت چپ، به سنگ شماره ۷ برود؟



الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۱۴

(۳) به چند طریق می توان سه زیرمجموعه دو عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 6\}$ انتخاب کرد به طوری که هر دو تا از آن ها دقیقا یک عضو مشترک داشته باشند؟

الف) ۲۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ ه) ۸۰

(۴) به ازای چند عدد طبیعی n ، $\left[\frac{n^2}{3} \right]$ عددی اول است؟ ($[x]$ جزء صحیح x است.)

الف) یک ب) دو ج) سه د) بی نهایت ه) چنین عددی وجود ندارد.

(۵) چهارضلعی ABCD در بین چهارضلعی هایی که داخل نیم دایره ای به شعاع واحد قرار دارند، بیش ترین مساحت را دارد. مساحت ABCD چه قدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{2\sqrt{2}}{4}$ ج) $\frac{6}{5}$ د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ه) $\sqrt{2}$

۶) در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB=AC$)، نیمساز زاویه C مثلث ABC را به دو مثلث متساوی الساقین دیگر تقسیم کرده است. نسبت $\frac{BC}{AB}$ برابر با کدام یک از اعداد زیر است؟

- (الف) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ج) $\sqrt{2}$ (د) $\frac{1}{2}$ (ه) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

۷) سهمی $y=x^2-2ax+1$ و خط $y=2b(a-x)$ را در نظر بگیرید. تعریف کنید

$$A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{خط و سهمی مذکور یکدیگر را قطع نمی کنند}\}$$

مساحت A چه قدر است؟

- (الف) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ج) A بی کران است. (د) 1 (ه) π

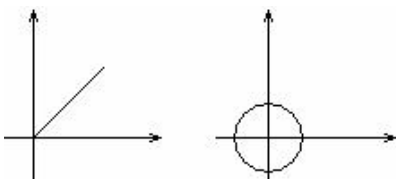
۸) خط در صفحه طوری رسم شده است که هر کدام افقی، عمودی یا موازی نیمساز ربع اول و سوم (یعنی خط $y=x$) است. در این وضعیت، صفحه حداکثر به چند قسمت (کران دار یا بی کران) تقسیم شده است؟

- (الف) ۶۳ (ب) ۸۱ (ج) ۱۲۱ (د) ۱۲۷ (ه) ۲۱۶

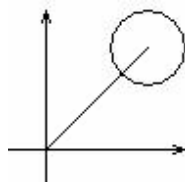
۹) فرض کنید A و B دو زیر مجموعه از نقاط صفحه باشند. مجموعه $A \oplus B$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$A \oplus B = \{(x_1+x_2, y_1+y_2) \mid (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$$

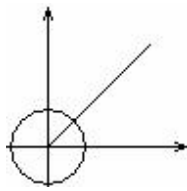
اگر A و B پاره خط و دایره نشان داده شده در شکل مقابل باشند،



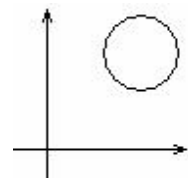
آنگاه $A \oplus B$ کدام یک از شکل های زیر خواهد بود؟



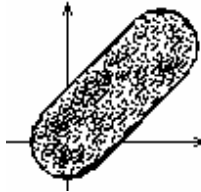
(ج)



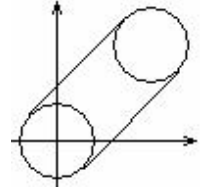
(ب)



(الف)



(ه)



(د)

۱۰) قطر یک زیرمجموعه از صفحه یعنی بزرگ ترین فاصله بین نقاط آن. به عنوان مثال، قطر هر مثلث برابر طول بزرگ ترین ضلع آن است. فرض کنید قطر دو مجموعه ی A و B برابر d است. کم ترین و بیش ترین مقدار قطر $A \oplus B$ چه قدر است؟ ($A \oplus B$ همان است که در سوال قبل تعریف شده است.)

(ه) $2d$ و $3d$

(د) $2d$ و $\sqrt{2}d$

(ج) d و $2d$

(ب) $\sqrt{2}d$ و $\sqrt{3}d$

(الف) d و d

۱۱) مجموعه های A_k ، $k \in \mathbb{N}$ به صورت زیر تعریف می شوند.

مجموعه ی اعداد اول $A_1 =$

$$A_{k+1} = \{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{k+1} \mid a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \in A_k\}$$

توجه کنید که a_1, a_2, \dots و a_{k+1} لزوما متمایز نیستند. کدام یک از اعداد زیر، دست کم عضوی یکی از A_k ها است؟

(ه) $2^{60} \times 3^{12} \times 5^6$

(د) $2^{111} \times 3^9$

(ج) $2^{231} \times 7^{25}$

(ب) $2^{25} \times 5^{25}$

(الف) $3^7 \times 2^{223}$

۱۲) به ازای چند مقدار طبیعی برای a ، معادله ی $\frac{1}{x} = \frac{a}{x+y} - \frac{1}{y}$ در مجموعه ی اعداد طبیعی جواب دارد؟

(ه) بی نهایت

(د) چهار تا

(ج) دو تا

(ب) یکی

(الف) چنین a ای وجود ندارد.

۱۳) می توان ثابت کرد در هر مثلث دلخواه ABC ، قرینه ی مرکز ارتفاعیه (محل همرسی ارتفاع ها) نسبت به وسط ضلع BC روی دایره ی محیطی مثلث قرار می گیرد. این نقطه را D بنامید. اندازه ی زاویه ی DAC برابر است با:

الف) $\frac{\widehat{A}}{2}$ (ب) $\frac{\widehat{B}}{2}$ (ج) $90 - A$ (د) $90 - B$ (ه) $90 - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$

۱۴) فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی وارون پذیر باشد و $h(x) = \frac{kf(x)}{1-f(x)}$. اگر h وارون پذیر باشد، آن گاه $\frac{x}{f(x)} - x$ برابر است با

الف) $f(x)$ (ب) $h(x)$ (ج) kx (د) k (ه) $\frac{x}{f(x)} - x$

۱۵) کاغذی مستطیل شکل را چندین بار تا کرده ایم. در هر مرحله تا بر روی خطی موازی دو ضلع و در وسط آن ها زده شده است تا به مستطیلی با مساحت نصف مستطیل قبل برسیم. واضح است که در هر مرحله این کار به دو روش (افقی و عمودی) امکانپذیر است. در نهایت، همه تا ها را باز کرده ایم و دیده ایم در مجموع ۳۱۸ خط تا ی افقی و عمودی تولید شده است. کاغذ چند بار تا شده است؟

الف) ۱۳ (ب) ۱۴ (ج) ۱۵۹ (د) ۳۱۷ (ه) ۳۱۸

۱۶) مربع تو پری به ضلع واحد در فضا در نظر بگیرید. حجم مجموعه ی نقاطی که فاصله ی آن ها دست کم از یکی از نقاط مربع کوچک تر یا مساوی ۱ باشد، چه قدر است؟

الف) ۲ (ب) $2(1 + \frac{2}{3}\pi)$ (ج) $2(1 + \pi)$ (د) ۸ (ه) $2(1 + \frac{5}{3}\pi)$

۱۷) فرض کنید $S(n)$ مجموع ارقام عدد n باشد. چند عدد هفت رقمی n وجود دارد که ارقام ۱ تا ۹ دقیقا یک بار در بین رقم های n و $S(n)$ ظاهر شده باشد؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۵۰۴۰ (ه) ۱۰۰۸۰

۱۸) فرض کنید عدد طبیعی a داده شده است. در هر گام، به جای عددی که در اختیار داریم یکی از عدد های $2a+1$ ، $3a+2$ ، $4a+3$ و یا $5a+4$ را در نظر مس گیریم و کار را با آن ادامه می دهیم. با شروع از کدام یک از اعداد زیر، می توان بعد از تعدادی گام به عدد $30^{1383} - 1$ رسید؟

- الف) ۱۰ (ب) ۱۱ (ج) ۱۲ (د) ۱۳ (ه) هیچ کدام

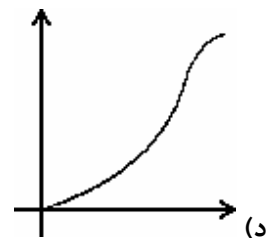
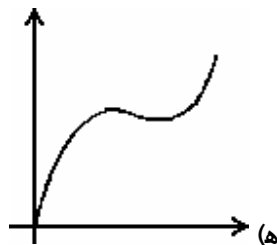
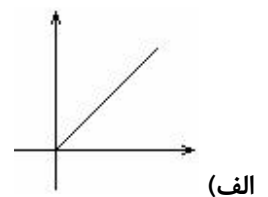
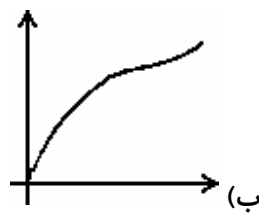
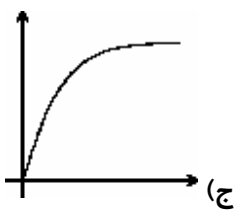
۱۹) فرض کنید $f(x) = x$ و برای هر $n \geq 0$ ، $f_{n+1}(x) = \sqrt{1 - f_n(x)}$. دامنه ی تابع $f_{1383}(x)$ کدام است؟

- الف) $(-\infty, 1]$ (ب) $[0, 1]$ (ج) $[\frac{1}{3^{1383}}, 1]$ (د) $\{1\}$ (ه) $\{0\}$

۲۰) در ظرفی به شکل رو به رو با نرخ ثابت در هر دقیقه یک لیتر آب می ریزیم.



کدام یک از نمودار های زیر می تواند نشان دهنده ی ارتفاع آب بر حسب زمان باشد؟



۲۱) در دایره ای به شعاع واحد، AB کمانی 60° و XY قطر متغیری از دایره است. خطوط XA و XB یکدیگر را در نقطه P قطع می کنند. مکان هندسی محل برخورد ارتفاع های مثلث PXY چیست؟

الف) دایره ای به شعاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 ب) خطی به موازات AB و به فاصله $\frac{\sqrt{3}}{2}$ از آن

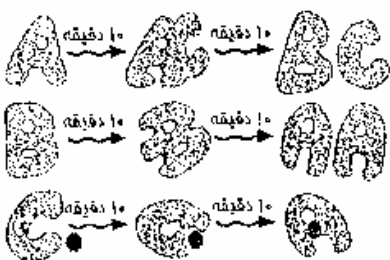
ج) دایره ای به شعاع $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 د) خطی به موازات AB و به فاصله $\frac{\sqrt{3}}{2}$ از آن

ه) دایره ای به شعاع ۱

۲۲) یک عدد طبیعی را یکنوا می گوئیم هر گاه رقم صفر نداشته باشد و به علاوه ارقام آن به صورت اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی مرتب شده باشند. مثلا اعداد ۱۳۵۶ و ۷۲ یکنوا هستند اما اعداد ۲۰۳۴، ۲۲ و ۱۳۸۳ یکنوا نیستند. مجموع همه ی اعداد یکنوا ی چهار رقمی چند است؟

الف) ۱۳۹۹۸۶۰ (ب) ۹۹۹۹۹۸۰ (ج) ۷۹۵۵۴۲۰ (د) ۱۲۶۰۰۰۰ (ه) ۴۹۴۹۵۵۰

۲۳) بیماری کشنده ی ABC توسط باکتری ای به همین نام تولید می شود. این باکتری در واقع دارای سه نوع A ، B و C است که شبیه این قوانین به هم تبدیل می شوند: پس از گذشت هر ۲۰ دقیقه هر باکتری A به یک B و یک C ، هر باکتری B به دو A و هر باکتری C به یک A تبدیل می شود. به علاوه هر بار که C به A تبدیل می شود یک گلبول قرمز را نیز می خورد!



اگر در آغاز تنها یک باکتری از نوع B وارد بدن شده باشد، پس از گذشت ۱۰ ساعت چند گلبول قرمز خورده شده است؟

الف) بین ۱۰۰ تا ۵۰۰ هزار (ب) بین ۵۰۰ هزار تا ۱ میلیون (ج) بین ۱ تا ۵ میلیون

د) بین ۵ تا ۱۰ میلیون (ه) بیش از ۱۰ میلیون

۲۴) دستگاه معادلات رو به رو را در نظر بگیرید که در آن A و B ماتریس های 2×2 ، I ماتریس همانی 2×2 و O ماتریس 2×2 با درایه های صفر است.

$$2A^6 + 2A^2 + A + B = O$$

$$A^2 - A + I = O$$

داریم

(ج) $A + 3B = O$

(ب) $A + B = I$

(الف) $3A + B = O$

(ه) این دستگاه جواب ندارد.

(د) $A^2 + B^2 = O$

۲۵) می خواهیم اعداد طبیعی را طوری رنگ آمیزی کنیم که اولاً هر دو عدد متوالی ناهم رنگ باشند و ثانياً برای هر دو عدد ناهم رنگ a و b، یا باقیمانده ی a بر ۱۱ متفاوت باشد، یا باقیمانده ی a و b بر ۱۷. کم ترین تعداد رنگ های لازم چند تا است؟

(ه) ۱۴۷

(د) ۲۱

(ج) ۷

(ب) ۳

(الف) ۲

۲۶) معادله ی $\frac{x}{3} + \left[\frac{x}{3} \right] = \sin x + [\sin x]$ چند جواب حقیقی دارد؟ ([a] جزء صحیح a است.)

(ه) پنج تا

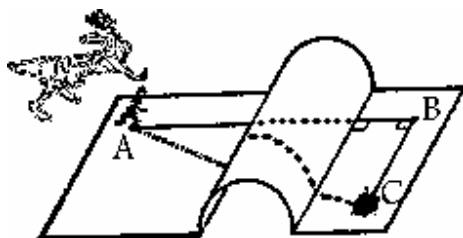
(د) سه تا

(ج) دو تا

(ب) یکی

(الف) جواب ندارد.

۲۷) در شکل مقابل مثلث ABC قائم الزاویه است ($B = 90^\circ$) و $AB = 10 - \pi$ و $BC = 6$. نیم استوانه ای با شعاع واحد و محور عمود بر AB، بین نقاط A و C مانع شده است.



مورچه بنا به دلایلی (!) باید هر چه سریع تر از نقطه ی A به لانه اش در نقطه ی C برود. طول کوتاه ترین مسیر ممکن برابر است با

(ه) ۱۱

(د) $7 + \pi$

(ج) ۱۰

(ب) $\sqrt{136} - \pi$

(الف) $\sqrt{136}$

۲۸) مهره ای در مبدا مختصات قرار داده ایم. در هر مرحله مهره را توسط یکی از چهار بردار (m, n) ، $(-m, -n)$ ، $(n+1, m+1)$ یا $(-n-1, -m-1)$ به نقطه ی دیگری منتقل می کنیم و این کار را تکرار می کنیم. به ازای کدام یک از (m, n) های زیر می توان مهره را به هر نقطه صفحه با مختصات صحیح رساند؟

الف) $m=1$ و $n=3$ ب) $m=2$ و $n=3$ ج) $m=3$ و $n=5$

د) $m=4$ و $n=7$ ه) به ازای هیچ m و n ای نمی توان این کار را انجام داد.

۲۹) فرض کنید $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. باقی مانده تقسیم $f(x^2)$ بر $f(x)$ کدام است؟

الف) $x^3 + x^2 + x + 1$ ب) $x^2 - x + 6$ ج) $x + 6$

د) 6 ه) $6 - x$

۳۰) یک چراغ راهنمای عجیب سه کلید دارد که هر کلید آن می تواند در یکی از وضعیت های ۱، ۲ یا ۳ قرار گیرد.



می دانیم که اگر وضعیت هر سه کلید را همزمان تغییر دهیم، رنگ چراغ تغییر می کند. ابتدا هر سه کلید در وضعیت ۱ هستند و چراغ قرمز است. افسر پلیس با تغییر وضعیت کلید اول از ۱ به ۲ چراغ را سبز می کند. حال اگر کلید دوم را هم در وضعیت ۲ قرار دهد، چراغ چه رنگی می شود؟

الف) قرمز ب) قرمز ج) سبز

د) فقط می توان گفت سبز نیست. ه) هر رنگی مکن است باشد.