

مرحله ی دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی ایران

نوبت اول: چهارشنبه، ۳۰ فروردین ماه ۱۳۸۵

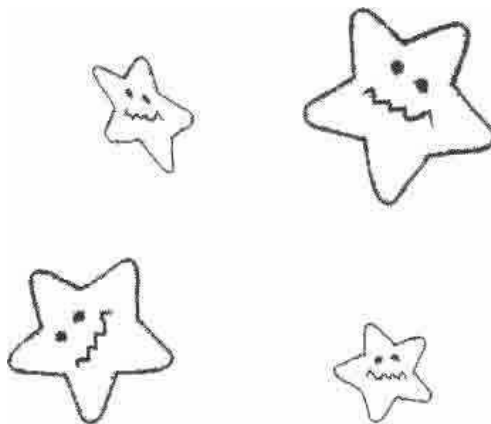
شروع: ساعت ۱۴، مدت آزمون: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

هر سؤال ۷ نمره دارد.

(۱) فرض کنید دایره ی C_2 از مرکز دایره ی C_1 گذشته و آن را در نقاط M و N قطع کرده است. نشان دهید اگر نقاط A و B دو سر دلخواهی از C_1 و A' و B' محل تقاطع خط های AM و BN با دایره ی C_2 باشند، $A'B'$ برابر شعاع دایره ی C_1 است.

(۲) همه ی چندجمله ای های با ضرایب حقیقی $P(x,y)$ را بیابید که برای هر x و y داشته باشیم $P(x+y,x-y)=2P(x,y)$.

(۳) در طول شب، ستاره های آسمان، در بازه های زمانی مختلف، قابل رویت هستند. فرض کنید از بین هر k ستاره ($k > 1$)، دست کم دو تایشان را می توان در یک لحظه در آسمان دید. نشان دهید می توانیم $k-1$ عکس در لحظات مختلف از سرتاسر آسمان بگیریم که هر کدام از آن ستاره ها، دست کم در یکی از عکس ها دیده شود. (تعداد ستاره ها متناهی است. لحظاتی که ستاره ی n در آسمان دیده می شود را بازه ی بسته ی $[a_n, b_n]$ بنامید که در آن $a_n < b_n$)



نوبت دوم: پنج شنبه، ۳۱ فروردین ماه ۱۳۸۵

شروع: ساعت ۹، مدت آزمون: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

هر سؤال ۷ نمره دارد.

(۴) الف) عدد طبیعی m بزرگ تر از یک است. ثابت کنید تنها متناهی عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $mn+1$ بر $m+n$ بخش پذیر است.

ب) برای اعداد طبیعی متمایز $m, n > 2$ ثابت کنید دنباله a_0, a_1, \dots, a_k از اعداد طبیعی بزرگ تر از ۲ موجود است که $a_0 = m$ و $a_k = n$ و برای هر $i = 0, 1, \dots, k-1$ داریم $a_i + a_{i+1} | a_i a_{i+1} + 1$.

(۵) نقاط A و B و C و D ، با همین ترتیب، روی دایره ای قرار دارند. نشان دهید تعداد نقطه های روی دایره، مانند M ، که

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC}$$

چهار تاست و به علاوه قطر های چهارضلعی حاصل از آن نقطه ها بر هم عمودند.

(۶) تعدادی کتاب روی هم قرار گرفته اند. فردی ابتدا کتاب بالایی را پشت و رو می کند، سپس دو کتاب بالایی را هم زمان پشت و رو می کند، بعد سه کتاب بالایی را هم زمان پشت و رو می کند و الی آخر. پس از این که به آخرین کتاب رسید همان کار را از ابتدا شروع می کند. ثابت کنید پس از تعدادی جابجایی، کتاب ها دقیقا به همان وضع اول بر می گردند.

