

مسأله های مرحله ی دوم پنجمین دوره ی المپیاد ریاضی

دانش آموزان کشور، اردیبهشت ماه ۱۳۶۷

الف - جلسه ی صبح

۱. مطلوب است محاسبه ی عبارت

$$A = \sin 1^\circ \times \sin 2^\circ \times \dots \times \sin 89^\circ$$

۲. تابع پیوسته ی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را چنان تعیین کنید که به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x-y) = f(x) - f(y)$$

۳. چهار خط متمایز L_1, L_2, L_3, L_4 را در فضا در نظر بگیرید که هیچ سه تای آن ها در یک صفحه قرار نداشته باشند. فرض کنید محل تقاطع خطوط L_1 و L_2 نقطه ی A ، محل تقاطع خطوط L_2 و L_3 نقطه ی B و محل تقاطع خطوط L_3 و L_4 نقطه ی C باشد. حداقل و حداکثر تعداد خطوطی را که در فضا هر چهار خط فوق را قطع می نمایند تعیین کرده و ادعای خود را ثابت کنید.

ب - جلسه ی بعدازظهر

۱. اعداد صحیح و مثبت a, b, c را چنان تعیین کنید که داشته باشیم

$$\begin{cases} a^r - b^r - c^r = 3abc \\ a^r = r(b+c) \end{cases}$$

۲. فرض کنید تابع حقیقی f در فاصله ی $[0, \infty)$ تعریف شده و f' و f'' در این فاصله موجود باشند و داشته باشیم

$$f''(x) = \frac{1}{x^r + f'(x)^r + 1}; f(0) = f'(0) = 0$$

ثابت کنید تابع g با ضابطه ی

$$g(0) = 0, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x > 0)$$

کراندار است.

۳. در شکل زیر نقاط M, N, P, Q به ترتیب در وسط اضلاع مربع $ABCD$ قرار دارند. ثابت کنید مقدار

مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ برابر $\frac{1}{5}$ مساحت مربع $ABCD$ است.

