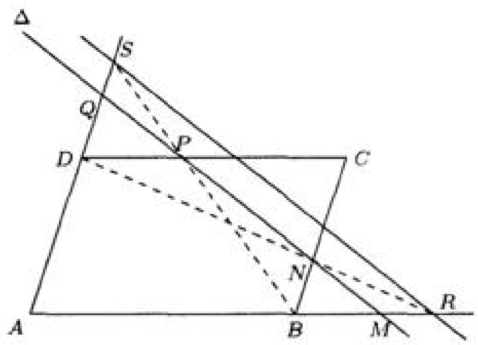
مسأله های مرحله ی دوم هشتمین المپیاد ریاضی دانش آموزان کشور

بهمن ماه ۱۳۶۹

۱. متوازی الاضلاع ABCD داده شده است، خط Δ خطوط AB، BC، CD و DA را به ترتیب در نقاط M، N، P و Q قطع می کند. اگر محل برخورد AB و DN را R و محل برخورد AD و BP را S بنامیم، ثابت کنید که

$$RS \parallel \Delta$$



۲. جواب های صحیح معادله ی سیاله ی زیر را به دست آورید.

$$(x^۲-x)(x^۲-۲x+۲)=y^۲-۱$$

۳. الف) ثابت کنید به ازای هر $n \geq ۱$ داریم

$$۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{n^۲}<۲$$

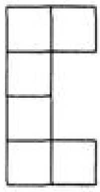
ب) برای مجموعه ی $X=\{۱،۲،۳,\ldots,n\}$ که در آن $n \geq ۱$، زیرمجموعه های ناتهی X را A_k، $(k=۱،۲،۳,\ldots,m)$ می نامیم. (بدیهی است که $m=۲^n-۱$). اگر حاصلضرب تمام عضو های مجموعه ی A_k را با a_k نشان دهیم، ثابت کنید که

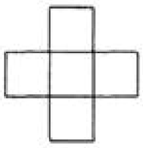
$$\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{m}\frac{۱}{a_i \times j^۲}<۲n+۱$$

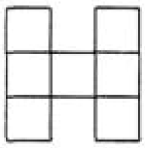
۴. مجموعه ی مثلث های ABC را در نظر میگیریم که در دایره ای به شعاع R محاط اند، در چه صورت $AB^2+AC^2+BC^2$ ماکزیمم است؟ این ماکزیمم را حساب کنید. همچنین مجموعه ی چهاروجهی های $ABCD$ را که در کره ای به شعاع R محاط باشند در نظر می گیریم؛ در چه صورت مجموع مربعات ۶ یال آن ها ماکزیمم است؟ این ماکزیمم را نیز محاسبه کنید و ثابت کنید در این حالت وجوه با هم برابرند.

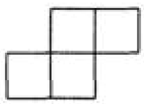
۵. اگر α ریشه ی معادله ی $x^3-5x+3=0$ و $f(x)$ یک چندجمله ای با ضرایب گویا باشد، نشان دهید که هر گاه [اگر] $f(\alpha)$ ریشه ی معادله ی درجه سوم بالا باشد، آن گاه $f(f(\alpha))$ نیز ریشه ی معادله خواهد بود.

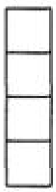
۶. می خواهیم زمینی مستطیلی شکل به ابعاد 5×137 را با موزاییک هایی به اشکال زیر فرش کنیم. نشان دهید این عمل امکانپذیر نیست.


شکل ۱


شکل ۲


شکل ۳


شکل ۴


شکل ۵

« در پنج شکل فوق هر یک از مربع ها به ضلع واحد است.»